



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

DIPARTIMENTO DI FISICA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

**Effetti globali di un'equazione di stato
polinomiale sulle proprietà delle stelle di
neutroni**

Relatore: Prof. Gianluca Colò
Correlatore: Dott. Xavier Roca Maza

Tesi di Laurea di:
Giovanni Selva
Matricola n. 797358
Codice PACS: 26.60.c

Anno Accademico 2014 - 2015

Indice

Introduzione	5
1 Stelle di neutroni ed equilibrio idrostatico	7
1.1 Le stelle di neutroni	7
1.2 Le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff	8
1.2.1 Integrazione numerica	9
2 Neutroni liberi	11
2.1 Equazione di stato del gas di Fermi	11
2.1.1 Neutroni non-relativistici	12
2.1.2 Neutroni ultra-relativistici	16
2.2 Neutroni relativistici	17
2.2.1 Risultati	18
3 Neutroni interagenti	21
3.1 Un semplice modello di equazione di stato	21
3.2 Risultati	23
3.2.1 Discussione dei risultati	25
Conclusioni	29
Bibliografia	32

Introduzione

Le stelle di neutroni rappresentano lo stadio finale dell'evoluzione delle stelle con determinati valori della loro massa (più grande dei valori per cui l'evoluzione finale è una nana bianca, e più piccola dei valori per cui si arriva a creare un buco nero). Sono composte da materia ricca di neutroni e sono le stelle più compatte dell'universo. Non si conosce ancora molto riguardo alla struttura interna di questi corpi celesti, dove la materia vive in condizioni di densità estreme che non possono essere studiate in laboratorio, ma soltanto attraverso l'elaborazione di modelli teorici. Tuttavia alcune osservazioni permettono di dedurre comunque massa e raggio della stella. Esistono indicazioni anche su altre proprietà come il loro raffreddamento, la loro frequenza di rotazione o il campo magnetico in superficie.

In questa tesi ci occupiamo di risolvere le equazioni di equilibrio idrostatico per calcolare la massa e il raggio delle stelle di neutroni, effettuando varie semplificazioni, la prima delle quali è che la stella sia sferica e sia composta da un gas di neutroni uniforme che si attrae gravitazionalmente. Quindi vogliamo trovare una soluzione semplice, senza indagare in dettaglio la struttura interna della stella, che può essere complessa. Miriamo ad avere comunque una rappresentazione realistica delle proprietà globali.

La risoluzione delle equazioni dipende dal modello nucleare considerato. Dopo una breve introduzione sulle stelle di neutroni e una presentazione delle equazioni di bilancio esposte nel capitolo 1, cominciamo a considerare un modello semplice, descritto nel capitolo 2: neutroni liberi che costituiscono un gas di Fermi, sia relativistici che non relativistici. Confrontiamo poi i nostri risultati con i lavori di R. Silbar e S. Reddy, esposti nel loro articolo pedagogico *'Neutron Stars for Undergraduates'* [1].

Successivamente, nel capitolo 3, sviluppiamo un modello per neutroni interagenti: ipotizziamo che i neutroni abbiano, oltre all'energia cinetica, un'energia potenziale dovuta alla loro interazione nucleare, espressa come polinomio della densità. I coefficienti del polinomio si mostrerà che sono legati ad alcune proprietà empiriche della materia nucleare, come la densità di saturazione, l'energia per particella a questa densità, e l'energia di simmetria.

Imponendo dei valori per queste quantità, ricaveremo un'equazione di stato, ovvero una relazione tra pressione e densità di energia, necessaria per risolvere le equazioni di equilibrio. Si tratta di una funzione polinomiale implicita, dato che pressione e densità di energia dipendono entrambe dalla densità di particelle come polinomi, ma non possono essere esplicitate l'una in funzione dell'altra.

Il nostro scopo è, in sostanza, vedere se con valori realistici dei coefficienti della nostra equazione di stato è possibile ricavare valori ragionevoli per la massa e il raggio delle stelle di neutroni.

Capitolo 1

Stelle di neutroni ed equilibrio idrostatico

1.1 Le stelle di neutroni

Le stelle di neutroni sono degli oggetti compatti caratterizzati da un'elevatissima densità, fino a 5-10 volte la densità nucleare, e da valori tipici di massa $M \sim 1.4M_{\odot}$ e raggio $R \sim 10\text{km}$, dove $M_{\odot}$ è la massa del Sole [2].

Furono scoperte nel 1965 da Jocelyn Bell e A. Hewish, che lavoravano al *Cavendish Laboratory* di Cambridge [3]. Essi scoprirono l'esistenza di una sorgente radio che emetteva radiazioni a intervalli estremamente regolari di circa 1s, tant'è che si credette inizialmente che fosse un messaggio da parte di extraterrestri. Poi in realtà si capì che la sorgente in questione era un corpo celeste circondato da un forte campo magnetico e che ruotava velocissimo, emettendo fasci di radiazione orientati nella direzione dell'asse magnetico, che non coincideva con l'asse di rotazione. Quindi dalla Terra si osservavano impulsi regolari, perciò le stelle di questo tipo vennero chiamate *pulsar*.

Le stelle di neutroni si formano in seguito al collasso gravitazionale del nucleo di una stella massiva al termine della sua evoluzione, quando il combustibile si esaurisce e non c'è più pressione che possa sostenere dall'interno l'attrazione gravitazionale. Il nucleo collassa fino a raggiungere una posizione di equilibrio, alla quale diventa così denso che il processo di cattura elettronica risulta energeticamente favorevole. Si forma così un mezzo ricco di neutroni, con una densità media attorno a quella dei nuclei ordinari ($\sim 10^{14}\text{g/cm}^3$), mentre la pressione di degenerazione dei neutroni interviene e impedisce che la stella si trasformi in un buco nero. L'arresto del collasso produce un'onda d'urto che scaglia l'involucro esterno di materia nello spazio a velocità enormi, con un'esplosione chiamata *supernova*. Il nucleo rimasto

8CAPITOLO 1. STELLE DI NEUTRONI ED EQUILIBRIO IDROSTATICO

è una stella con una temperatura superficiale dell'ordine di 10^6K , un campo magnetico di $10^{12}\text{-}10^{15}\text{G}$ [4], con un raggio tipicamente di 10km e una massa di $1.4M_{\odot}$, ma che può arrivare a $2M_{\odot}$ [5]. Dunque il campo gravitazionale generato è incredibilmente intenso, e la relatività generale avrà un ruolo importante nello studio di questi corpi celesti.

Le condizioni in cui vengono a trovarsi i neutroni sono estreme e spesso non riproducibili in laboratorio. Per questo motivo conosciamo ancora poco riguardo alla struttura interna di queste stelle. Tuttavia sono oggetti di studio interessanti perché le osservazioni in certi casi permettono di verificare la validità di modelli teorici che descrivono la materia nucleare [2, 6, 7].

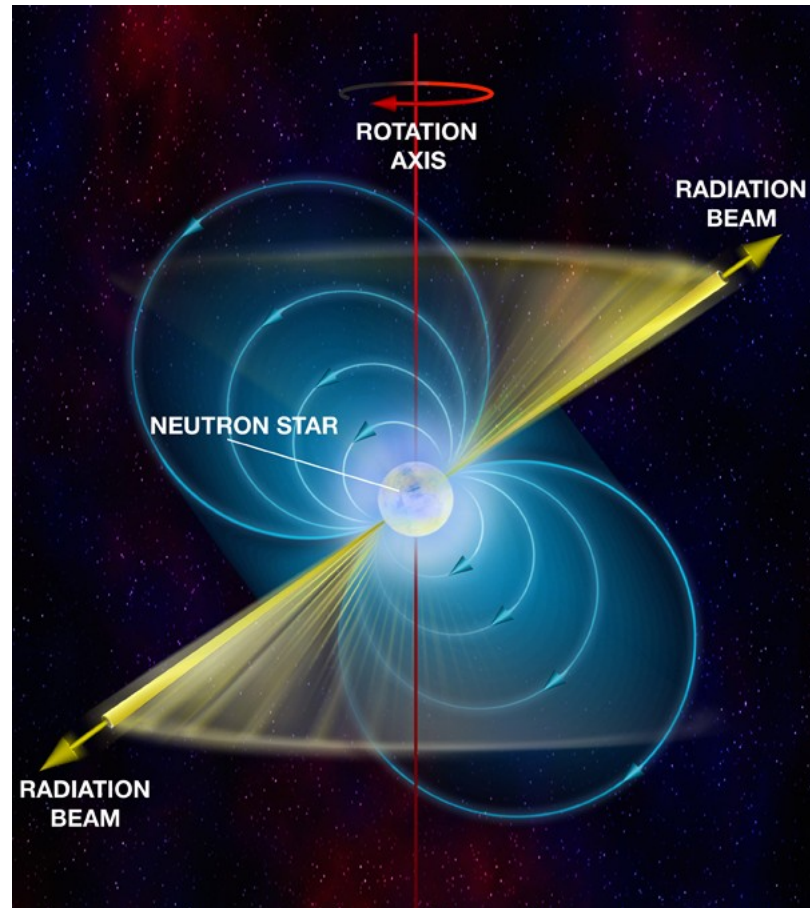


Figura 1.1: Rappresentazione di una pulsar [8]. Sono mostrate le linee di campo magnetico, l'asse di rotazione e il fascio di radiazioni emesse lungo l'asse magnetico

1.2 Le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Siamo interessati a determinare l'andamento della massa e della pressione interna di una stella in funzione della distanza dal centro.

La stella è stabile se esiste una pressione interna in equilibrio meccanico con la pressione dovuta alla forza di gravità. Assumendo simmetria sferica e materia uniforme, consideriamo un guscio compreso tra r e $r + dr$: esso contiene una massa $dM = \rho(r)dV = \rho(r)4\pi r^2 dr$, dove $\rho(r)$ è la densità. Perciò la pressione interna a distanza r è pari alla forza di attrazione gravitazionale tra il guscio e la massa $M(r)$ contenuta all'interno diviso la superficie sferica:

$$dp = \frac{dF}{A} = -G \frac{dM M(r)}{r^2} \frac{1}{4\pi r^2} = -G \frac{\rho(r) M(r)}{r^2} dr$$

Partiamo descrivendo il caso non relativistico. Le equazioni

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = -G \frac{\rho(r) M(r)}{r^2} \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \end{cases} \quad (1.1)$$

sono chiamate equazioni newtoniane di *equilibrio idrostatico*. Si tratta di una coppia di equazioni differenziali al I ordine accoppiate. Per risolverle abbiamo bisogno di una relazione tra pressione e densità, ovvero di un'*equazione di stato* (EoS). Se definiamo la densità di energia $\epsilon(r) = \rho(r)c^2$, in accordo con l'equivalenza tra massa e energia, la EoS diventa la relazione $p = p(\epsilon)$.

A seconda del modello nucleare considerato abbiamo diverse espressioni per l'energia e di conseguenza diverse pressioni. Come si determina la EoS? Se ci troviamo a temperatura $T \sim 10^6 \text{K} \sim 10^{-4} \text{MeV}$ [9], trascurabile rispetto all'energia cinetica di singola particella ($\sim 22 \text{MeV}$ attorno alla densità nucleare), allora lo scambio di calore è $\delta Q = 0$. Dal I principio della termodinamica $dU = \delta Q - pdV$ segue che:

$$p = -\frac{dU}{dV}|_{T=0, N \text{ cost.}} = -\frac{d(U/N)}{d(V/N)} = -\frac{de}{d(1/n)} = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn} = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon$$

dove e è l'energia per particella, mentre n è la densità di particelle. Dunque abbiamo bisogno solo di conoscere ϵ in funzione di n , così possiamo calcolare la EoS e risolvere le equazioni (1.1).

Se la massa della stella è molto grande, ovvero quando $\frac{GM^2}{R} \gg Mc^2$, allora dobbiamo aggiungere delle correzioni di relatività generale. Le equazioni di

equilibrio diventano [10]:

$$\begin{cases} \frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{c^2 M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \\ \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\epsilon(r)}{c^2} \end{cases} \quad (1.2)$$

e si chiamano equazioni di *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*. Le correzioni consistono in tre fattori aggiuntivi positivi e maggiori di 1, come se le gravità fosse diventata più forte. L'equazione per la massa resta inalterata.

1.2.1 Integrazione numerica

Un' equazione di stato che si scrive nella forma $p = K\epsilon^\gamma$, dove K e γ sono costanti, viene chiamata *politropo*. L'uso di un politropo è conveniente perché si può esplicitare la pressione in funzione della densità di energia e risolvere facilmente le equazioni di TOV.

Per risolvere comodamente le equazioni di TOV (1.2) apportiamo alcune modifiche alle variabili di integrazione in modo da renderle adimensionali. Definiamo: $M(r) = \bar{M}(r)M_\odot$, $p(r) = \epsilon_0 \bar{p}(r)$, $\epsilon(r) = \epsilon_0 \bar{\epsilon}(r)$, dove ϵ_0 è una costante dimensionale che possiamo scegliere in modo conveniente per non dover trattare numeri troppo grandi o piccoli.

Per un politropo vale $p = K\epsilon^\gamma$, allora $\epsilon_0 \bar{p}(r) = K\epsilon_0^\gamma \bar{\epsilon}^\gamma(r)$, da cui $\bar{p}(r) = K\epsilon_0^{\gamma-1} \bar{\epsilon}^\gamma(r) = \bar{K} \bar{\epsilon}^\gamma(r)$, con $\bar{K} = K\epsilon_0^{\gamma-1}$. Le equazioni di TOV diventano:

$$\begin{cases} \epsilon_0 \frac{d\bar{p}(r)}{dr} = -\frac{GM_\odot \epsilon_0 \bar{\epsilon}(r) \bar{M}(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{\bar{p}(r)}{\bar{\epsilon}(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \epsilon_0 \bar{p}(r)}{M_\odot c^2 \bar{M}(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM_\odot \bar{M}(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \\ M_\odot \frac{d\bar{M}(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon_0 \frac{\bar{\epsilon}(r)}{c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}(r)}{dr} = -\alpha \frac{\bar{p}^{\frac{1}{\gamma}}(r) \bar{M}(r)}{r^2} \left[1 + \bar{K}^{\frac{1}{\gamma}} \bar{p}^{1-\frac{1}{\gamma}}(r) \right] \left[1 + \frac{4\pi \epsilon_0 r^3}{M_\odot c^2} \frac{\bar{p}(r)}{\bar{M}(r)} \right] \left[1 - 2R_0 \frac{\bar{M}(r)}{r} \right]^{-1} \\ \frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \beta r^2 \bar{p}^{\frac{1}{\gamma}}(r) \end{cases} \quad (1.3)$$

dove $R_0 = \frac{GM_\odot}{c^2} = 1.473\text{km}$, $\alpha = R_0 \bar{K}^{\frac{1}{\gamma}}$, $\beta = \frac{4\pi \epsilon_0}{M_\odot c^2 \bar{K}^{\frac{1}{\gamma}}}$. Possiamo scegliere un valore arbitrario per α , dal quale ricaviamo ϵ_0 e quindi β .

Come risolviamo le equazioni di TOV?

Abbiamo trovato la soluzione numericamente, implementando un programma che integra le equazioni con un metodo di Runge Kutta di ordine IV. Considerato uno step di integrazione di $2 \cdot 10^{-2}\text{km}$, l'errore per calcolare

un punto da parte del metodo è dell'ordine di $32 \cdot 10^{-10}$, che si propaga su un intervallo di circa 10km (il raggio della stella), quindi di 500 punti, con un errore finale di $500 \cdot 32 \cdot 10^{-10} \approx 10^{-6}$. Tuttavia, date le tante approssimazioni effettuate nei vari modelli per le equazioni di stato, i risultati sono esposti ad incertezze più grandi.

Il raggio della stella è definito come il punto in cui la pressione si azzerava. Perciò il programma valuta anche la pressione ad ogni ciclo: quando questa assume un valore negativo abbiamo trovato il raggio, e quindi la massa totale, dunque interrompiamo l'integrazione. Si può poi riportare ogni punto su un grafico per osservare l'andamento della pressione e della massa.

Per integrare le equazioni abbiamo bisogno delle condizioni iniziali di pressione e massa: la massa a raggio zero è ovviamente nulla e non può che aumentare con il raggio. La pressione centrale non la si conosce: perciò andiamo a studiare quali soluzioni si ottengono per diversi valori di questa, costruendo così anche un grafico massa-raggio [8].

Capitolo 2

Neutroni liberi

2.1 Equazione di stato del gas di Fermi

Consideriamo innanzitutto il modello di particelle più semplice, ovvero quello di neutroni liberi che costituiscono un gas di Fermi. È chiaro che non si tratta di un modello molto realistico, perché non tiene in considerazione fattori, come l'interazione nucleare o il fatto che nelle stelle di neutroni è presente anche una frazione di protoni ed elettroni. Tuttavia ha valore pedagogico poiché è il caso più semplice da cui possiamo ottenere risultati ragionevoli e perché abbiamo potuto confermare i risultati confrontandoli con il lavoro già svolto da altri autori. Vogliamo trovare un'espressione per la densità di energia da inserire nelle equazioni di TOV.

A temperatura nulla, il gas di Fermi è completamente degenere, ed è costituito da particelle che occupano gli stati disponibili meno energetici. Dal principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \Delta k \sim h$, dove indichiamo con k il momento, segue che il numero di particelle nell'unità di volume che possiedono un certo momento k è dato da:

$$dn = \frac{g}{(\Delta x)^3} = g \frac{(\Delta k)^3}{h^3} = g \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3 \hbar^3} = \frac{k^2}{\pi^2 \hbar^3} dk$$

dove $g = 2$ è il fattore di degenerazione dovuta allo spin. Dunque:

$$n = \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\pi^2 \hbar^3} dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

dove k_F è il momento di Fermi, ovvero il momento massimo permesso a temperatura zero. Invertendo troviamo $k_F = \hbar(3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}$.

La densità di energia è $\epsilon = E dn$, con $E = \sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4}$, ovvero l'energia relativistica di un neutrone libero, di massa m , con un certo momento k .

Dunque:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4} k^2 dk = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{k_F}{mc}} \sqrt{u^2 + 1} u^2 du = \\ &= \frac{m^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[(2x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} - \sinh^{-1}(x) \right]\end{aligned}$$

dove $x = \frac{k_F}{mc}$ è il parametro relativistico (o momento di Fermi adimensionale). Così troviamo la pressione:

$$\begin{aligned}p &= n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = n \sqrt{k_F^2 c^2 + m^2 c^4} - \epsilon = \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} x^3 \sqrt{x^2 + 1} - \epsilon = \\ &= \frac{m^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{2}{3} x^3 - x \right) \sqrt{x^2 + 1} + \sinh^{-1}(x) \right]\end{aligned}$$

In questo caso la pressione è la cosiddetta *pressione di degenerazione* dovuta al principio di esclusione di Pauli, che non permette a due fermioni identici di occupare lo stesso stato quantistico. L'equazione di stato che si ottiene è la relazione implicita data dal sistema:

$$\begin{cases} \epsilon(x) = \tilde{\epsilon} \left[(2x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} - \sinh^{-1}(x) \right] \\ p(x) = \tilde{\epsilon} \left[\left(\frac{2}{3} x^3 - x \right) \sqrt{x^2 + 1} + \sinh^{-1}(x) \right] \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $\tilde{\epsilon} = \frac{m^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} = 1.15 \cdot 10^{-3} M_\odot c^2 km^{-3}$, e $M_\odot$ è l'unità di massa solare.

Consideriamo prima i casi limite di neutroni non-relativistici e ultra-relativistici, e successivamente neutroni con parametro relativistico arbitrario.

2.1.1 Neutroni non-relativistici

I neutroni non-relativistici possiedono momento molto piccolo rispetto alla loro massa a riposo, perciò è valida l'approssimazione

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4} k^2 dk = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} mc^2 \sqrt{\frac{k^2 c^2}{m^2 c^4} + 1} k^2 dk \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} mc^2 \left(1 + \frac{k^2}{2m^2 c^2} \right) k^2 dk = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} \left(mc^2 + \frac{k^2}{2m} \right) k^2 dk = \\ &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \left(mc^2 \frac{k_F^3}{3} + \frac{k_F^5}{10m} \right)\end{aligned} \quad (2.2)$$

Quindi

$$p = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} (mc^2 + \frac{k_F^2}{2m}) - \frac{1}{\pi^2\hbar^3} (mc^2 \frac{k_F^3}{3} + \frac{k_F^5}{10m}) = \frac{k_F^5}{15\pi^2\hbar^3 m} = K\epsilon^{\frac{5}{3}}$$

$$\text{con } K = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m} \left(\frac{3\pi^2}{mc^2} \right)^{\frac{5}{3}} = 9.55 \text{km}^2 (\text{M}_\odot \text{c}^2)^{-\frac{2}{3}}.$$

Abbiamo trovato l'equazione di stato di un politropo con $\gamma = \frac{5}{3}$, quindi ora possiamo risolvere le equazioni di TOV. Scegliamo $\alpha = 1 \text{km}$, da cui $\epsilon_0 = 0.08969 \text{M}_\odot \text{c}^2 \text{km}^{-3}$ e $\beta = 0.7636 \text{km}^{-3}$.

I risultati ottenuti sono in accordo con quelli esposti nell'articolo di R. Silbar e S. Reddy [1]. Mostriamo in tabella 2.1 i risultati per qualche valore indicativo della pressione centrale $\bar{p}_0$. Troviamo il raggio della stella quando la pressione cambia segno nel processo di integrazione; osserviamo che questo avviene circa a $\bar{p} = 10^{-13}$. A destra ci sono i risultati delle equazioni di TOV (1.2), a sinistra delle equazioni di equilibrio newtoniane (1.1), ossia senza le correzioni di relatività generale.

$\bar{p}_0$	raggio	massa	$\bar{p}_0$	raggio	massa
10^{-2}	10.4	3.08	10^{-2}	7.5	0.97
10^{-3}	13.2	1.55	10^{-3}	11.1	0.88
10^{-4}	16.6	0.77	10^{-4}	15.3	0.60
10^{-5}	20.9	0.39	10^{-5}	20.2	0.35
10^{-6}	26.4	0.19	10^{-6}	25.9	0.19

Tabella 2.1: Tabella di massa e raggio delle stelle di neutroni per qualche valore della pressione centrale. Nella colonna di destra ci sono i risultati delle equazioni di TOV, in quella di sinistra delle equazioni di equilibrio newtoniane. La pressione è espressa in unità $\epsilon_0 = 0.08969 \text{M}_\odot \text{c}^2 \text{km}^{-3}$, il raggio in km e la massa in $\text{M}_\odot$.

Mostriamo ora in figura 2.1 i grafici della pressione e della massa per il valore della pressione centrale $\bar{p}_0 = 10^{-4}$. La curva più sottile corrisponde alla soluzione per le equazioni newtoniane 1.1, la curva più spessa per le equazioni di TOV 1.2. Notiamo che le correzioni relativistiche non sono trascurabili, poiché hanno l'effetto di diminuire la massa della stella.

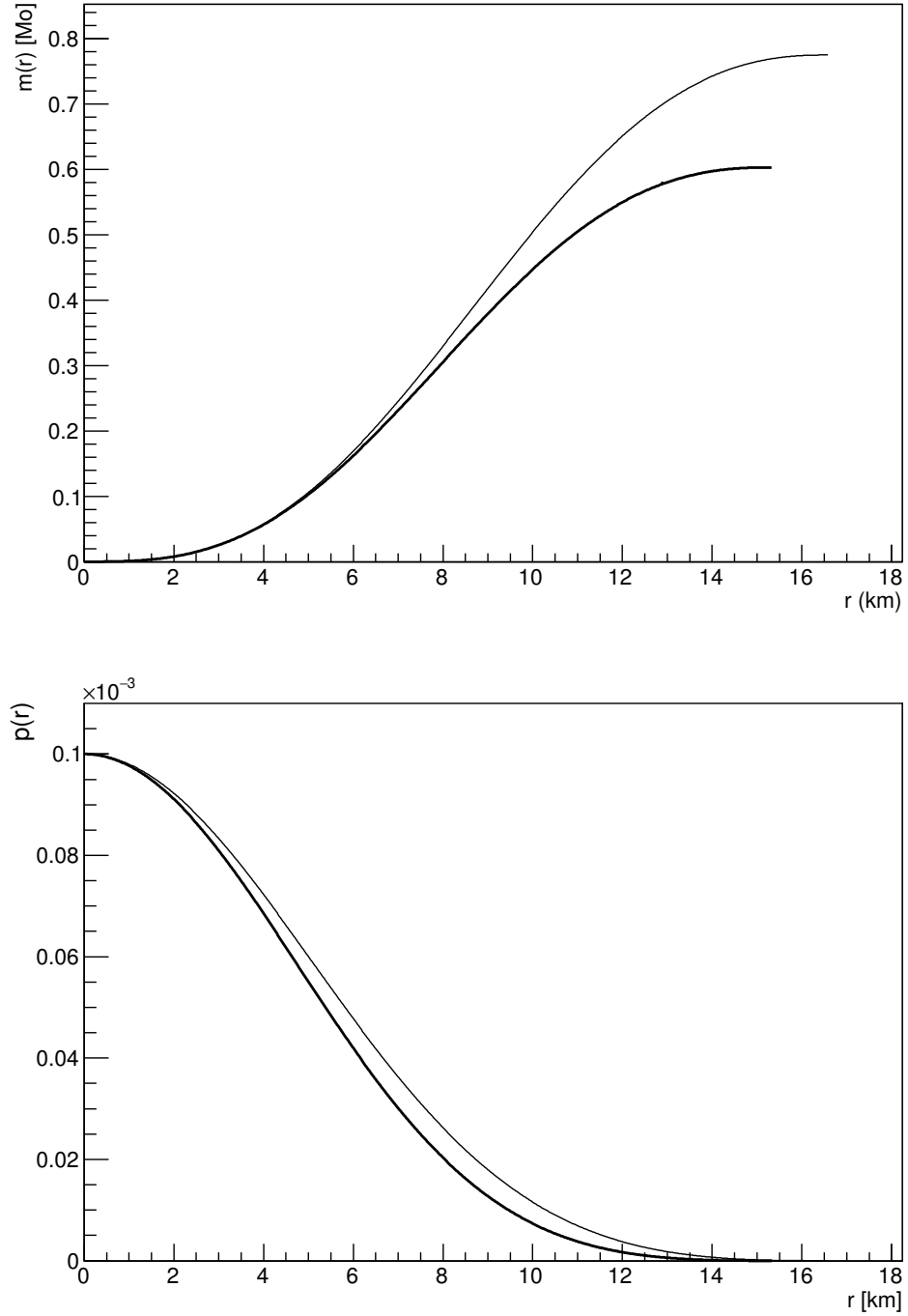


Figura 2.1: Andamento della massa (in alto) e della pressione (in basso) in funzione del raggio. La massa è espressa in $M_\odot$, la pressione in $0.08969 M_\odot c^2 \text{km}^{-3}$ e il raggio in km. Con le correzioni relativistiche (linea scura) troviamo una massa più piccola, visto che il loro contributo alle equazioni di TOV è quello di aumentare la gravità

Infine mostriamo il grafico massa su raggio in figura 2.2, per valori di pressione centrale $\bar{p}_0$ compresi tra 10^{-6} e 10^2 , per le equazioni di TOV. Dal momento che abbiamo constatato che le correzioni relativistiche sono fondamentali, ora omettiamo il grafico per il caso newtoniano.

Osserviamo che a basse pressioni la massa è piccola e il raggio è grande. Aumentando la pressione la massa deve aumentare per mantenere la stabilità, quindi la gravità aumenta, la stella si comprime e il raggio diminuisce. Tuttavia la massa della stella non può aumentare indefinitamente, ma si osserva un punto di massimo nel grafico. La spiegazione della presenza di questo limite di massa massima richiede delle conoscenze di relatività generale, e si può trovare nella referenza [11].

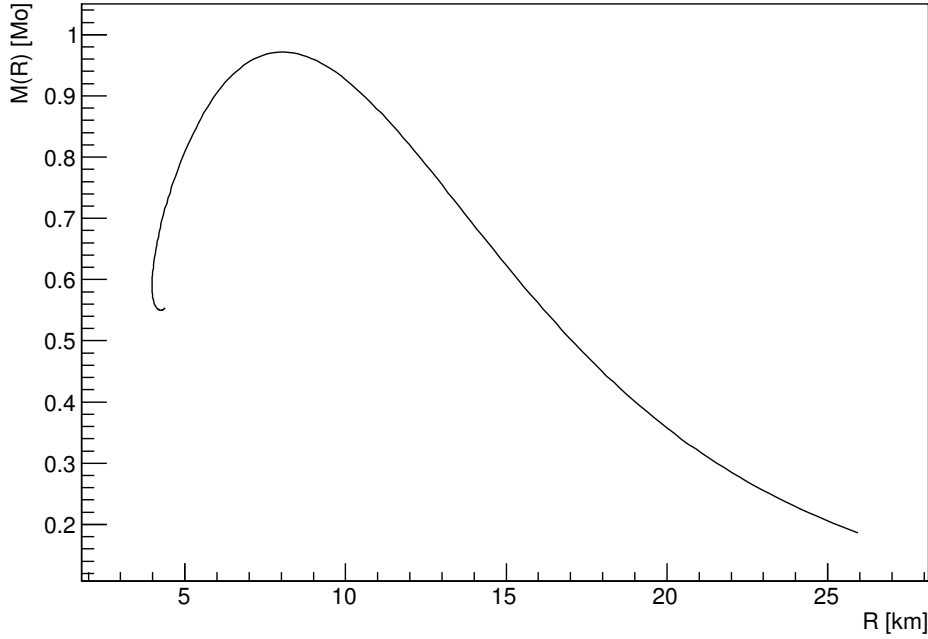


Figura 2.2: Grafico massa e raggio per stelle di neutroni non interagenti

2.1.2 Neutroni ultra-relativistici

Consideriamo ora neutroni ultra-relativistici, ovvero neutroni con momento $k_F \gg mc$. La densità può essere approssimata a:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4} k^2 dk \approx \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} c k^3 dk = \\ &= \frac{c}{\pi^2 \hbar^3} \frac{k_F^4}{4}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Dunque:

$$p(\epsilon) = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = \frac{k_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} c k_F - \epsilon = \frac{4}{3}\epsilon - \epsilon = \frac{1}{3}\epsilon$$

Anche questa volta ci troviamo di fronte all'equazione di stato di un politropo, con $K = \frac{1}{3}$ e $\gamma = 1$, perciò possiamo risolvere le equazioni di TOV (1.3), come per i neutroni non-relativistici, riscritte in questo modo:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}(r)}{dr} &= -\alpha \frac{\bar{p}(r)\bar{M}(r)}{r^2} \frac{4}{3} \left[1 + \frac{4\pi\epsilon_0 r^3}{M_\odot c^2} \frac{\bar{p}(r)}{\bar{M}(r)} \right] \left[1 - 2R_0 \frac{\bar{M}(r)}{r} \right]^{-1} \\ \frac{d\bar{M}(r)}{dr} &= \beta r^2 \bar{p}(r) \end{cases} \quad (2.4)$$

Infatti se $p = \frac{1}{3}\epsilon$ allora $\bar{p} = \frac{1}{3}\bar{\epsilon}$, quindi $\bar{K} = K = \frac{1}{3}$ e $\alpha = 3R_0 = 4.428\text{km}$. Scegliamo di nuovo la stessa unità di pressione e densità $\epsilon_0 = 0.08969 M_\odot c^2 \text{km}^{-3}$, da cui otteniamo $\beta = 3.374 \text{km}^{-3}$.

Ci accorgiamo che i risultati sono assurdi: nel processo di integrazione la pressione non si annulla mai in un intervallo ragionevole, quindi il programma calcola raggi ben maggiori di 100 km, totalmente in disaccordo con ogni osservazione. D'altronde le premesse stesse erano assurde, infatti si tratta di un caso limite non realistico, perché le particelle non possono essere tutte ultra-relativistiche a qualunque densità.

2.2 Neutroni relativistici

Riprendiamo ora l'equazione di stato (2.1) valida per qualsiasi valore del parametro relativistico $x = \frac{k_F}{mc}$:

$$\begin{cases} \epsilon(x) = \tilde{\epsilon} [(2x^3 + x)\sqrt{x^2 + 1} - \sinh^{-1}(x)] \\ p(x) = \tilde{\epsilon} [(\frac{2}{3}x^3 - x)\sqrt{x^2 + 1} + \sinh^{-1}(x)] \end{cases} \quad (2.5)$$

In questo caso generale non è possibile esplicitare p in funzione di ϵ o viceversa. Cosa hanno fatto Silbar e Reddy?

Innanzitutto hanno diviso pressione e densità di energia per l'unità di misura $\epsilon_0 = 0.003006 M_\odot c^2 \text{km}^{-3}$, per considerare variabili adimensionali; poi hanno messo in un grafico l'equazione di stato e ne hanno fatto un fit, con un'espressione che fosse in accordo con i casi limite visti in precedenza:

$$\bar{\epsilon}(p) = a\bar{p}^{\frac{3}{5}} + b\bar{p} \quad (2.6)$$

Infatti se i neutroni sono non-relativistici, allora la pressione è piccola e prevale il primo termine; se i neutroni sono ultra-relativistici, la pressione è grande e prevale il secondo termine. I valori che sono stati ottenuti dal fit sono $a = 2.4216$ e $b = 2.8663$; con tali valori gli autori hanno risolto le equazioni di TOV, e ottenuto dei risultati per massa e raggio delle stelle di neutroni.

Cosa facciamo noi? Per prima cosa confrontiamo l'EoS con questo fit, rappresentandoli nello stesso grafico. Ci accorgiamo che non coincidono perfettamente, anzi, l'errore relativo tra i due parte dall'8% a piccole pressioni e scende verso lo zero a grandi pressioni, restando significativo a pressioni medie che interessano a noi. Quindi non si tratta di un fit abbastanza preciso per i nostri scopi.

Perciò decidiamo di seguire un'altra strada: conoscendo una pressione $\tilde{p}$, possiamo ricavare numericamente il valore di x corrispondente, dal quale calcoliamo la densità. Per fare questo utilizziamo il metodo di bisezione, che calcola la soluzione dell'equazione $p(x) - \tilde{p} = 0$. Questo metodo deve conoscere gli estremi dell'intervallo in cui cercare la soluzione, e la precisione su x con cui trovarla. Ad ogni iterazione viene valutata l'equazione nel punto medio dell'intervallo, e prosegue la ricerca nel semi-intervallo in cui l'equazione valutata agli estremi ha ancora segno diverso. Si interrompe quando l'intervallo considerato è minore della precisione indicata. Impostando una precisione di 10^{-12} , molto piccola rispetto a qualunque x che ci interessa, scopriamo che il metodo funziona molto bene a qualunque pressione, quindi è molto più preciso del fit appena discusso.

2.2.1 Risultati

Mostriamo una tabella 2.2 i risultati per le equazioni di TOV, ottenuti con il metodo di bisezione (colonna sinistra) e con l'equazione di stato fittata (2.6)(colonna destra).

$\bar{p}_0$	raggio	massa	$\bar{p}_0$	raggio	massa
1	5.8	0.58	1	6.3	0.61
10^{-1}	8.5	0.71	10^{-1}	9.1	0.77
10^{-2}	12.5	0.64	10^{-2}	13.4	0.72
10^{-3}	17.2	0.44	10^{-3}	18.6	0.50

Tabella 2.2: Tabella di massa e raggio. Nella colonna di sinistra ci sono i risultati per l'equazione di stato calcolata con il metodo di bisezione, in quella di destra per l'equazione fittata. La pressione è espressa in unità $\epsilon_0 = 0.003006 M_\odot c^2 \text{km}^{-3}$, il raggio in km e la massa in $M_\odot$.

Mostriamo ora in figura 2.3 i grafici per la massa e la pressione in funzione della distanza dal centro della stella, calcolati con l'EoS esatta, per una pressione iniziale di 10^{-2} .

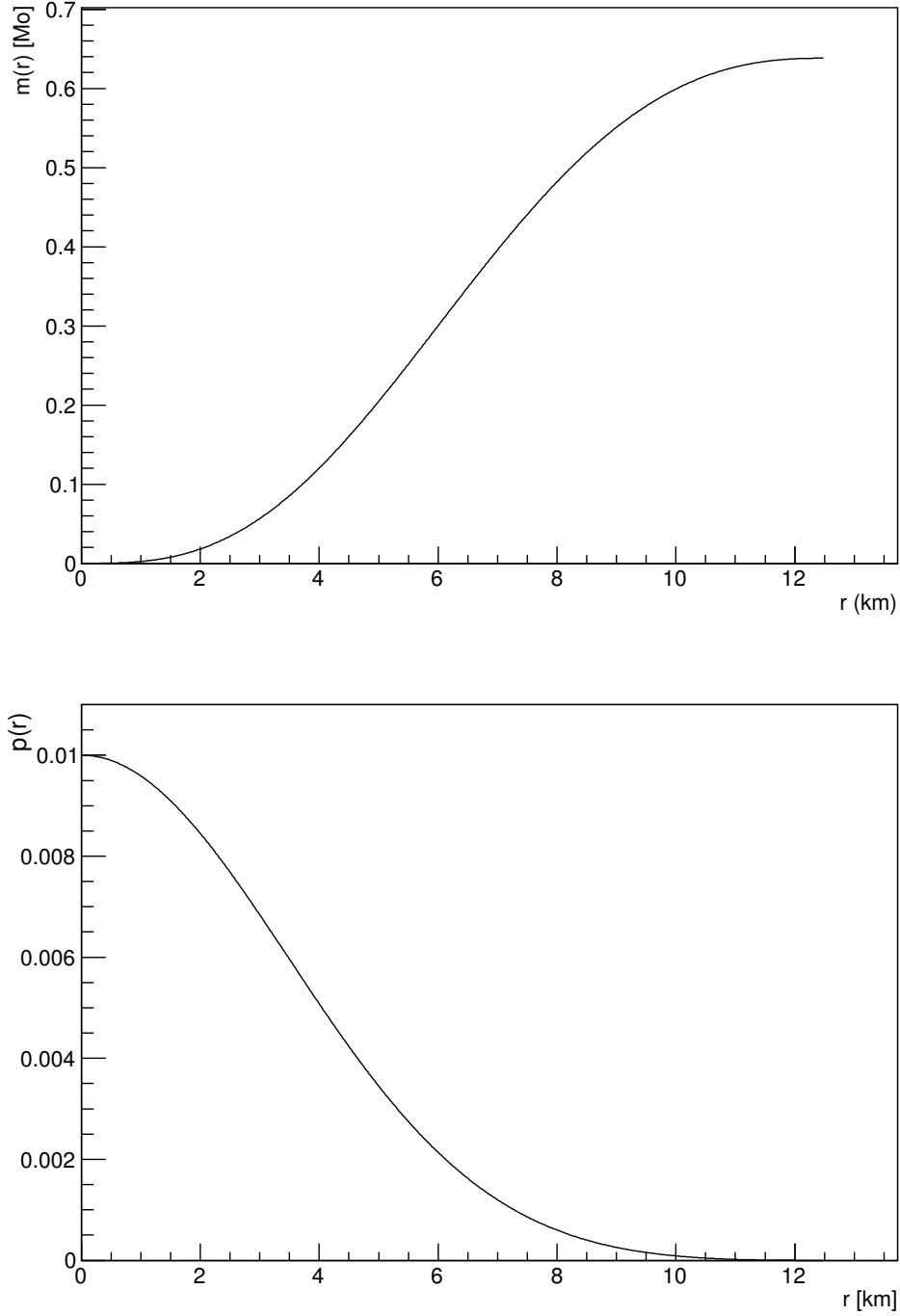


Figura 2.3: Massa (in $M_\odot$) e pressione ($0.003006M_\odot c^2 \text{km}^{-3}$) in funzione del raggio (km)

In figura 2.4 mostriamo le curve di stabilità, per un range di pressioni iniziali tra 10^{-6} a 100, ottenute con l'equazione di stato esatta e con il fit. Confrontandole, notiamo come l'errore del fit si trasmette sulla massa, restando in media attorno a 6%. Osserviamo che rispetto al caso di neutroni non-relativistici (figura 2.2) la massa massima diminuisce, e non raggiunge nemmeno i valori standard per le stelle di neutroni. Nel capitolo seguente scopriremo come questi vengano raggiunti se consideriamo nell'EoS anche l'interazione nucleare che agisce sui neutroni.

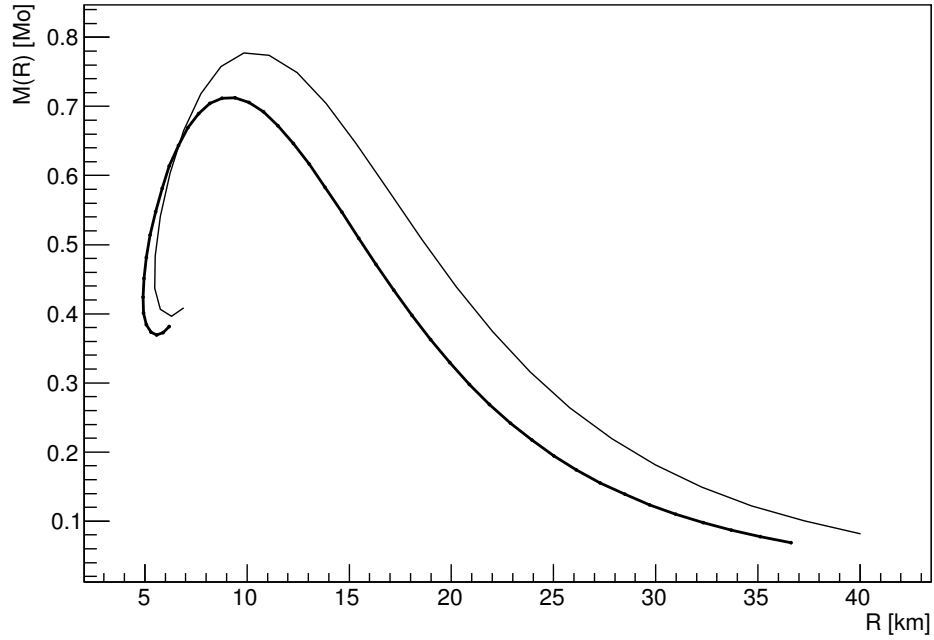


Figura 2.4: Curve di stabilità delle stelle di neutroni liberi relativistici. La più sottile è ottenuta con il fit, quella più spessa con l'equazione di stato esatta

Capitolo 3

Neutroni interagenti

3.1 Un semplice modello di equazione di stato

Prendiamo in considerazione un modello nucleare differente da quanto visto prima, e più realistico: supponiamo che esista una piccola frazione di protoni ed elettroni all'interno della stella, che garantisca la neutralità di carica. Supponiamo anche che ci sia equilibrio beta e che i neutroni e i protoni non siano liberi, ma abbiano una certa energia potenziale dovuta alla forte interazione nucleare, che dipende dalla densità totale di particelle n e dal parametro di asimmetria $I = \frac{n_N - n_P}{n}$, dove n_N e n_P sono rispettivamente la densità di neutroni e di protoni. Consideriamo materia nucleare uniforme, trascurando l'interazione coulombiana e il contributo all'energia degli elettroni [7].

L'ipotesi più semplice che possiamo fare è che questa energia per particella sia una serie di potenze della densità:

$$v(n, I) = \sum_{i=1}^N (a_{i,0}^N + a_{i,2}^N I^2) n^i$$

dove i coefficienti sono a loro volta serie di potenze di I , e dipendono dall'ordine di arresto N . Il motivo per cui inseriamo soltanto le potenze pari di I è il fatto che l'energia deve essere pari sotto lo scambio di protoni e neutroni, siccome l'interazione nucleare non dipende dallo stato di carica delle particelle [12]. Questa proprietà è chiamata *indipendenza di carica*. Arrestiamo questa serie al II ordine con buona precisione [7].

Inoltre l'energia per particella conterrà anche un termine cinetico, che prendiamo uguale a quello dei neutroni liberi non-relativistici. La densità

totale di energia cinetica è:

$$n t(n, I) = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} (n_N^{\frac{5}{3}} + n_P^{\frac{5}{3}}) = \frac{3\hbar^2 (3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{10m} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{5}{3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}})$$

dove m è la massa media di protone e neutrone. Dunque:

$$t(n, I) = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}}) = \frac{t_0}{2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}})$$

dove $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ è la *densità di saturazione* dei nuclei e $t_0 = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (n_0)^{\frac{2}{3}}$ è l'energia cinetica di un neutrone libero alla densità n_0 nella materia simmetrica (ovvero quando $I = 0$), e vale circa 22 MeV. Perciò l'energia per particella è:

$$e(n, I) = t(n, I) + v(n, I) = \frac{t_0}{2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}}) + \sum_{i=1}^N (a_{i,0}^N + a_{i,2}^N I^2) n^i \quad (3.1)$$

Prima di ricavare l'EoS, dobbiamo studiare un modo per calcolare i coefficienti $a_{i,0}^N$ e $a_{i,2}^N$. All'interno di una stella di neutroni si esplorano svariati ordini di grandezza di densità, così elevati che sono impossibili da studiare in laboratorio. Conosciamo le proprietà della materia simmetrica solo attorno alla densità di saturazione dei nuclei, perciò sviluppiamo la funzione $e(n, I)$ attorno a $I = 0$ al II ordine e successivamente attorno a $n = n_0$ al I ordine:

$$\begin{aligned} e(n, I) &= e(n, I = 0) + e_{sym}(n) I^2 = e_0 + \left(J + \frac{de_{sym}(n)}{dn} \Big|_{n=n_0} (n - n_0)\right) I^2 = \\ &= e_0 + \left(J + \frac{L}{3n_0} (n - n_0)\right) I^2 \end{aligned}$$

dove $e_{sym}(n) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} e(n, I) \Big|_{I=0}$ è chiamata *energia di simmetria*, e_0 è l'energia per particella a $n = n_0$ e $I = 0$, $\frac{\partial}{\partial n} e(n, I = 0) \Big|_{n=n_0} = 0$ perché la materia simmetrica, o l'interno dei nuclei con N circa uguale a Z , hanno una densità di equilibrio (in cui l'energia è minima) pari a n_0 . Inoltre $J \equiv e_{sym}(n_0)$ e $L \equiv 3n_0 \frac{de_{sym}}{dn}(n) \Big|_{n=n_0}$ sono grandezze molto studiate in letteratura perché caratterizzano l'energia della materia nucleare non simmetrica e hanno particolare impatto nello studio di materia neutronica uniforme.

Sviluppando allo stesso modo l'espressione (3.1) otteniamo:

$$\begin{aligned} e(n, I) &= t_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \sum_{i=0}^2 a_{i,0}^2 n^i + \left(\frac{5}{9} t_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} + a_{1,2} n + a_{2,2} n^2\right) I^2 = \\ &= t_0 + a_{1,0} n_0 + a_{2,0} n_0^2 + \left[\left(\frac{5}{9} t_0 + a_{1,2} n_0 + a_{2,2} n_0^2\right) + \left(\frac{10}{27} \frac{t_0}{n_0} + a_{1,2} + 2a_{2,2} n_0\right) (n - n_0) \right] I^2 \end{aligned}$$

Uguagliando i rispettivi termini dell'equazione precedente, troviamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_{1,0} = \frac{1}{n_0}(-\frac{4}{3}t_0 + 2e_0) \\ a_{2,0} = \frac{1}{n_0^2}(\frac{1}{3}t_0 - e_0) \\ a_{1,2} = \frac{1}{n_0}(-\frac{20}{27}t_0 + 2J - \frac{1}{3}L) \\ a_{2,2} = \frac{1}{n_0^2}(\frac{5}{27}t_0 - J + \frac{1}{3}L) \end{cases} \quad (3.2)$$

Abbiamo capito che i coefficienti nell'espressione dell'energia per particella sono legati a grandezze fisiche semi-empiriche. Aggiungiamo ora il termine per l'energia di massa e troviamo l'equazione di stato:

$$\begin{aligned} e(n, t) &= \frac{t_0}{2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}}) + \sum_{i=1}^N (a_{i,0}^N + a_{i,2}^N I^2) n^i + mc^2 \\ \begin{cases} \epsilon(n, I) = \frac{t_0}{2} \frac{n^{5/3}}{n_0^{2/3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}}) + \sum_{i=1}^2 (a_{i,0} + a_{i,2} I^2) n^{i+1} + n mc^2 \\ p(n, I) = \frac{t_0}{3} \frac{n^{5/3}}{n_0^{2/3}} ((1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}}) + \sum_{i=1}^2 (a_{i,0} + a_{i,2} I^2) i n^{i+1} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'equazione di stato è la relazione implicita tra p e ϵ data dal sistema.

3.2 Risultati

Fissiamo i parametri [13] $e_0 = -16.0\text{MeV}$, $n_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$, $J = 31.5\text{MeV}$, $L = 60\text{MeV}$ e otteniamo $t_0 = 22.10\text{MeV}$, $a_{1,0} = -384.17\text{MeVfm}^3$, $a_{1,2} = 166.43\text{MeVfm}^3$, $a_{2,0} = 912.76\text{MeVfm}^6$, $a_{2,2} = -289.35\text{MeVfm}^6$. Approssimiamo il parametro di asimmetria a $I = 1$, cioè consideriamo materia neutronica, e scegliamo di nuovo come unità di pressione $\epsilon_0 = 0.003006\text{M}_\odot\text{c}^2\text{km}^{-3}$. Ora abbiamo tutte le informazioni necessarie per ricavare la EoS (con il metodo di bisezione) e risolvere le equazioni di TOV (1.2).

Mostriamo in tabella 3.1 i risultati ottenuti per qualche valore indicativo dei valori centrali di densità e pressione, mentre la figura 3.1 mostra il grafico massa e raggio per valori della pressione centrale $\bar{p}_0$ compresi tra 10^{-6} e 10^2 . Confrontando con la figura 2.4, osserviamo quanto sia importante considerare anche l'energia di interazione nucleare nell'equazione di stato, visto che ora la massa raggiunge i valori standard per le stelle di neutroni.

n	$\bar{p}_0$	raggio	massa
0.16	$9.3 \cdot 10^{-4}$	11.1	0.25
0.30	$7.2 \cdot 10^{-3}$	12.1	0.94
0.50	$3.7 \cdot 10^{-2}$	11.9	1.67
0.70	$1.1 \cdot 10^{-1}$	10.8	1.84
1.00	$3.3 \cdot 10^{-1}$	9.5	1.74
2.00	2.8	7.9	1.31

Tabella 3.1: Tabella di massa e raggio. La densità è espressa in fm^{-3} , la pressione in $\epsilon_0 = 0.003006 M_\odot c^2 \text{km}^{-3}$, il raggio in km e la massa in $M_\odot$.

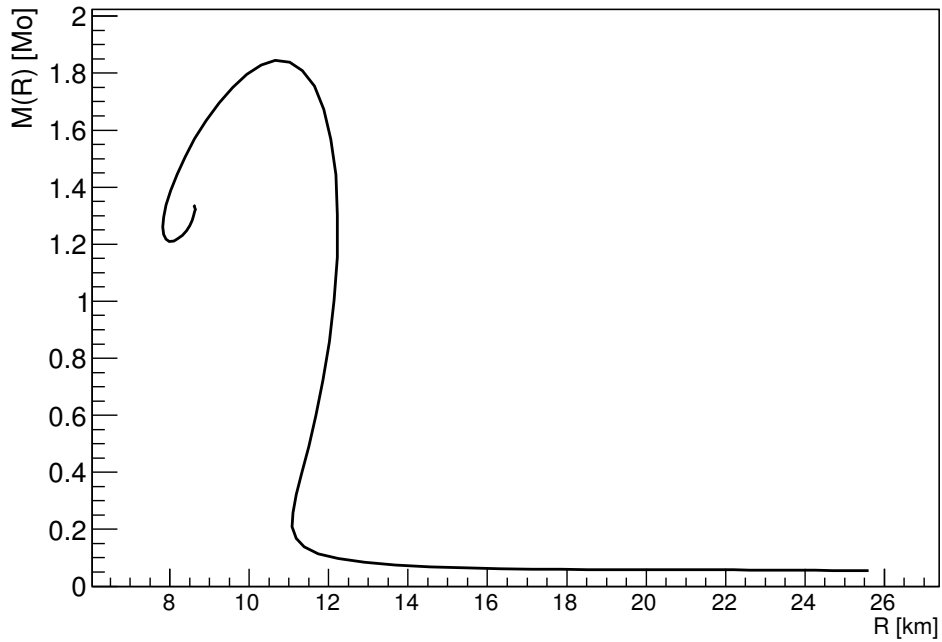


Figura 3.1: Grafico massa e raggio per neutroni interagenti

3.2.1 Discussione dei risultati

Le grandezze e_0 e n_0 sono conosciute con buona precisione, mentre J e L hanno un largo margine di incertezza. Infatti l'attuale conoscenza sperimentale e teorica ci porta a stimare J tra 28 e 34 MeV e L tra 30 e 90 MeV [13]. Osserviamo allora in figura 3.2 qual è la regione nel piano massa e raggio che può essere prodotta dal nostro modello, combinando i valori massimi e minimi di questi due parametri.

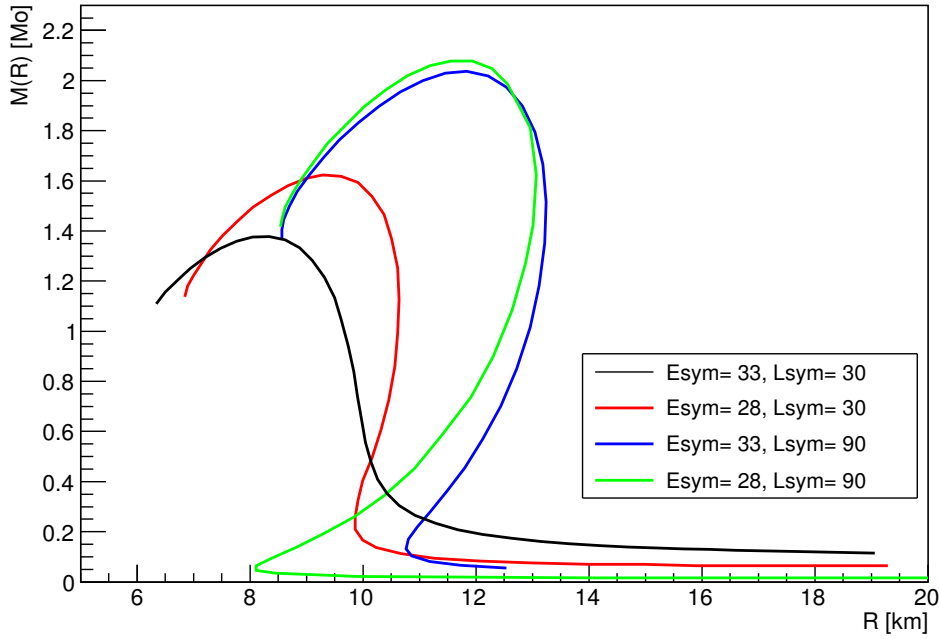


Figura 3.2: Massa e raggio per diversi valori dell'energia di simmetria (in MeV): $J = 28, L = 30$ (curva rossa); $J = 28, L = 90$ (verde); $J = 34, L = 30$ (gialla); $J = 34, L = 90$ (blu)

Sappiamo tuttavia che i parametri J e L non sono indipendenti, ma esiste una correlazione tra i due, infatti diversi modelli nucleari convergono che $e_{sym}(0.1 fm^{-3}) = 23 \pm 1 MeV$ [14]. Ricordando che vicino alla densità n_0 vale l'approssimazione: $e_{sym}(n) = J + \frac{n-n_0}{3n_0}L$, troviamo:

$$J = 23 MeV + \frac{1}{8}L \quad (3.4)$$

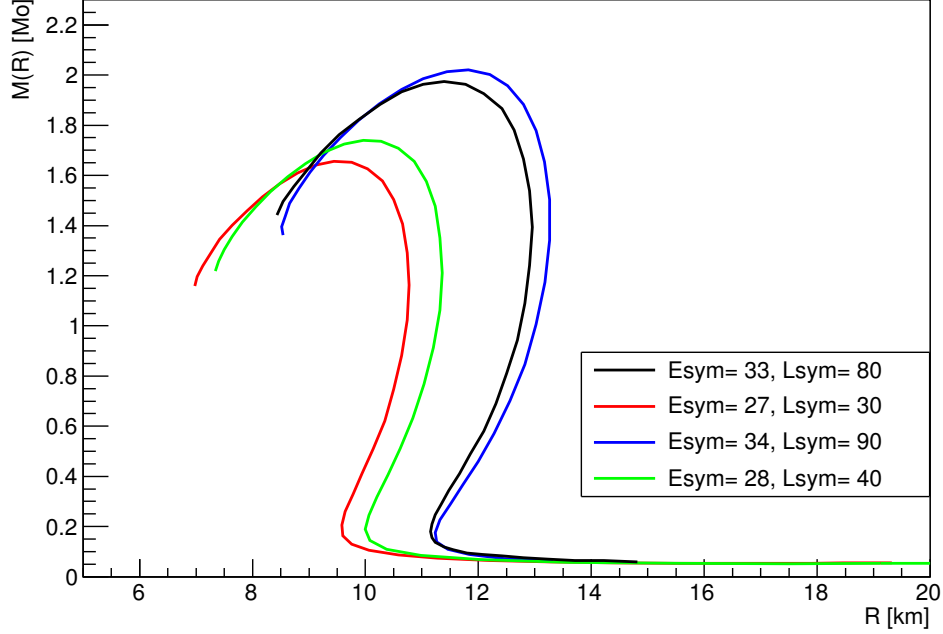


Figura 3.3: Massa e raggio per diversi valori dell'energia di simmetria (in MeV): $J = 27, L = 30$ (curva rossa); $J = 28, L = 40$ (verde); $J = 33, L = 80$ (gialla); $J = 34, L = 90$ (blu). Soltanto le ultime due raggiungono la massa di $2M_{\odot}$. I parametri sono correlati tramite la relazione (3.4)

Mostriamo perciò in figura 3.3 i risultati con i valori correlati dati da questa relazione. Notiamo che a parità di massa, aumentando i due parametri, aumenta il raggio della stella. Cerchiamo di dare una spiegazione qualitativa di questo fatto.

Studiamo il grafico dell'energia di simmetria $e_{sym}(n) = \frac{5}{9}t_0(\frac{n}{n_0})^{\frac{2}{3}} + a_{1,2} + a_{2,2}n^2$, dove ricordiamo che i coefficienti $a_{1,2}$ e $a_{2,2}$ dipendono da J e L . Per diversi valori di J avremmo tante possibili curve al variare di L , ma data la relazione precedente (3.4) tra i due, quest'ultimo è determinato una volta fissato J . Quindi ci troviamo di fronte a un set di curve passanti per un punto (figura 3.4), che crescono più rapidamente per alti valori dei due parametri, e più lentamente per valori bassi.

Notiamo dallo stesso grafico che a densità superiori di 0.1fm^{-3} la pendenza dell'energia è maggiore per le curve con L maggiore, mentre a piccole densità è maggiore se L è piccolo. Ricordiamo che la pressione è proporzionale alla derivata dell'energia per particella. Valutiamo qual è il range di densità predominante in una stella di neutroni standard, con una massa circa

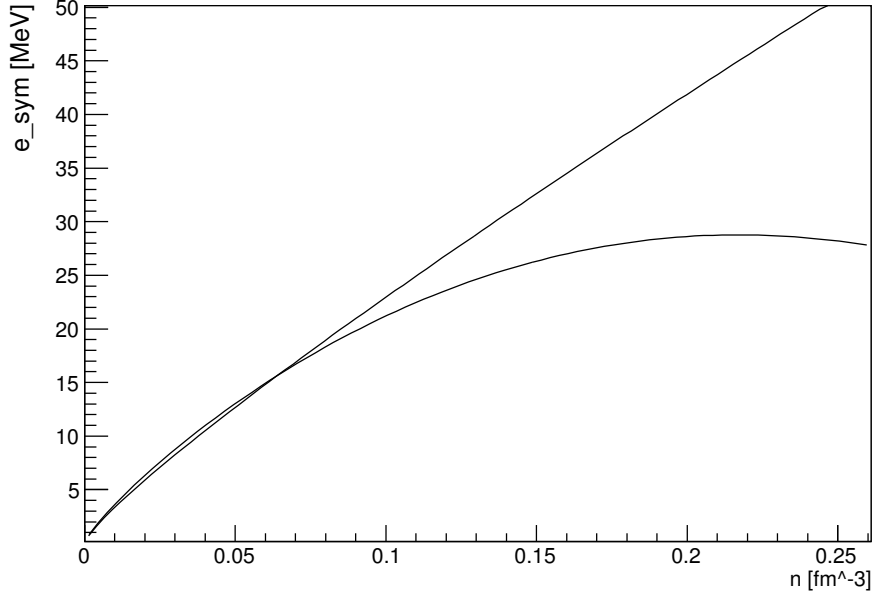


Figura 3.4: Energia di simmetria in funzione della densità. Sono rappresentate le curve limite, quelle con i valori (in MeV): $J = 27, L = 30$ (più bassa) e $J = 34, L = 90$ (più ripida)

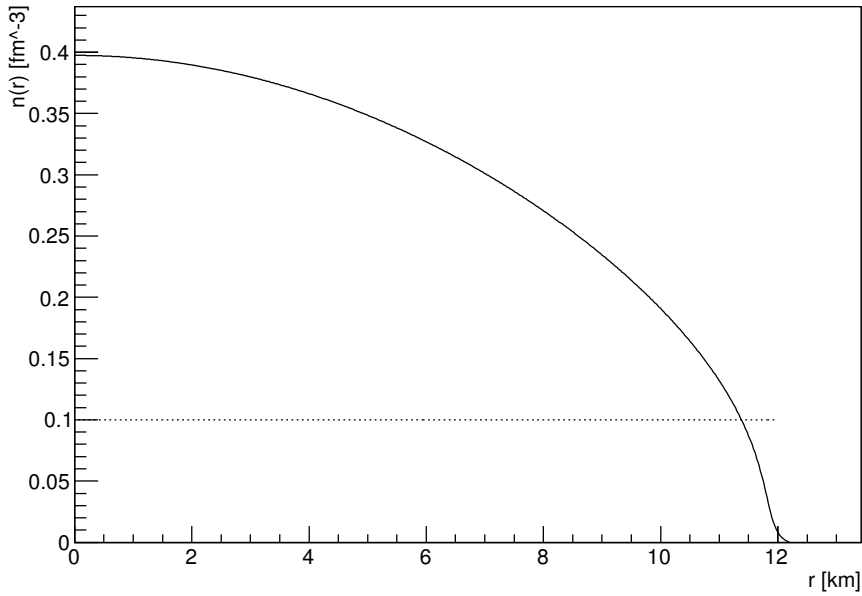


Figura 3.5: Densità di particelle interna a una stella di neutroni con massa standard di $1.4M_{\odot}$. In quasi tutta la stella questa è maggiore della densità media dei nuclei ordinari (linea tratteggiata)

$M = 1.4M_{\odot}$.

In figura 3.5 vediamo subito che contribuiscono maggiormente le densità più grandi di 0.1fm^{-3} , quindi in media la pressione aumenta all'aumentare di L . Perciò i neutroni sono soggetti a una forza più intensa proveniente dall'interno e, a parità di massa, il raggio aumenta.

Ci chiediamo infine se le curve disegnate in figura 3.3 riflettono le osservazioni sperimentali: tutte attraversano valori standard di massa e raggio, tuttavia solo quelle con valori massimi dei parametri J e L raggiungono una massa $M = 2M_{\odot}$, che è la più grande massa osservata per una stella di neutroni [3]. Dunque il modello di equazione di stato da noi presentato è compatibile con i risultati sperimentali per $J \sim 33\text{-}34\text{MeV}$ e $L \sim 80\text{-}90\text{MeV}$.

Conclusioni

L'obiettivo del lavoro di tesi era risolvere le equazioni di TOV per modelli nucleari molto semplici. I risultati per neutroni liberi sono già noti in letteratura [1], per cui abbiamo potuto trovare conferma dei nostri calcoli. Successivamente abbiamo preso in considerazione un'equazione di stato polinomiale, che è stata costruita supponendo che l'energia potenziale per i neutroni fosse espressa come serie di potenze della densità. Conoscendo al punto di saturazione $n_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$ l'energia di saturazione e_0 , l'energia di simmetria $J = 31 \pm 3\text{MeV}$ e la sua derivata $L = 60 \pm 30\text{MeV}$, abbiamo trovato dei legami tra queste grandezze e i parametri dell'EoS, sviluppando l'energia per particella $e(n, I)$ in serie di Taylor al I ordine in n e al II ordine in I , centrata in n_0 e $I = 1$.

Abbiamo trovato così risultati soddisfacenti per densità centrali comprese tra 3 e 5 volte n_0 , corrispondenti a pressioni centrali di circa 10^{34}Pa . Studiando quindi il variare delle soluzioni delle equazioni di TOV per diversi valori accettabili dei parametri J e L , abbiamo scoperto che a parità di massa il raggio della stella di neutroni aumenta all'aumentare di questi due parametri. È noto che tali parametri non sono indipendenti ma correlati tra loro, ed è stata utilizzata questa correlazione.

Inoltre, confrontando le osservazioni con il nostro modello, abbiamo scoperto che questo, nonostante sia semplificato, è valido per alcuni valori dei parametri che sono compatibili con gli esperimenti. Infatti riproduce le osservazioni di 2 masse solari, che è la più grande massa misurata, per $J \sim 33\text{-}34\text{MeV}$ e $L \sim 80\text{-}90\text{MeV}$.

Infine, ribadiamo che questo modello non è troppo realistico perché non tiene in considerazione il fatto che le stelle di neutroni non sono composte da materia uniforme, ma presentano in realtà una struttura più complessa. Tuttavia è adatto a descriverne le proprietà generali, e lo si potrebbe migliorare sviluppando l'equazione di stato polinomiale ad ordini successivi, trovando così risultati più affidabili.

Naturalmente non esiste alcuna garanzia che la vera equazione di stato per la materia neutronica abbia una forma polinomiale. Tuttavia tale for-

ma permette di legare in maniera molto semplice i parametri calcolati con le proprietà della materia nucleare. In una prospettiva più vasta, è possibile pensare in che misura tale equazione di stato riproduca o meno calcoli realistici della materia neutronica.

Bibliografia

- [1] R. Silbar S. Reddy. Neutron stars for undergraduates.
- [2] P. Haensel A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev. Neutron stars 1 - equation of state and structure. *Springer Science*, 2006.
- [3] A. Hewish S. Bell et al. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, (217), 1968.
- [4] A. Tiengo et al. A variable absorption feature in the x-ray spectrum of a magnetar. *Nature*, (500), 2013.
- [5] J. Antoniadis P. C. Freire et al. A massive pulsar in a compact relativistic binary. *Science*, (340), 2013.
- [6] Pearson J. M.; Chamel N.; Fantina A. F.; Goriely S. Symmetry energy: nuclear masses and neutron stars. *The European Physical Journal A*, 2014.
- [7] J. Piekarewicz. Relativistic density functional theory for finite nuclei and neutron stars. 2015.
- [8] J. Lattimer; Madappa Prakash. Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *arXiv:astro-ph/0612440v1*, 2006.
- [9] O. Gnedin; D. Yakovlev; A. Potekhin. Thermal relaxation in young neutron stars. *astro-ph/0012306*, 2001.
- [10] Stuart L. Shapiro Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. The physics of compact objects*. John Wiley —&— Sons, 1983.
- [11] N. Chamel P. Haensel J. L. Zdunik A. F. Fantina. On the maximum mass of neutron stars. *International Journal of Modern Physics E*, 2013.
- [12] Kenneth S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. Wiley, 1987.

- [13] M. B. Tsang J. R. Stone, F. Camera et al. Constraints on the symmetry energy and neutron skins from experiments and theory. *Physical Review*, 2012.
- [14] X. Roca-Maza M. Brenna et al. Giant quadrupole resonances in 208pb, the nuclear symmetry energy, and the neutron skin thickness. *Physical Review*, 2013.