



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea triennale in Fisica

Contributo dell'energia di correlazione
all'equazione di stato della materia
nucleare

Tesi di Laurea di
Riccardo Romano
Matricola 811247

Relatore:
Prof. Gianluca Colò

Correlatore:
Dott. Xavier Roca-Maza

Anno Accademico 2014-2015

Indice

Introduzione	iv
1 Modello di campo medio	1
1.1 Approssimazione di particella indipendente	1
1.1.1 Hamiltoniana di un sistema a molti corpi	1
1.1.2 Materia nucleare simmetrica omogenea	2
1.2 Teoria delle perturbazioni	3
1.2.1 Teoria perturbativa di Rayleigh-Schrödinger	4
1.2.2 Metodo Hartree-Fock	5
1.2.3 Hamiltoniana imperturbata di HF	7
1.3 Interazioni efficaci	8
1.3.1 Interazione Brink e Boeker	9
1.3.2 Interazione Gogny	9
2 Calcolo perturbativo dell'energia	11
2.1 Energia di Hamiltoniana imperturbata	11
2.1.1 Termine cinetico	11
2.1.2 Termine di potenziale	12
2.1.3 Equazione di stato	13
2.2 Sviluppo perturbativo al secondo ordine	15
2.2.1 Energia di singola particella	16
2.2.2 Momento trasferito	18
2.2.3 Termine diretto	20
2.2.4 Termine di scambio	25
2.2.5 Terzo termine	30
3 Equazione di stato e proprietà nucleari	33
3.1 Proprietà nucleari	33
3.2 Equazione di stato	37
3.2.1 Potenziale a singola gaussiana	37
3.2.2 Perturbazione al secondo ordine	41
3.2.3 Correlazioni di secondo ordine	42
3.3 Materia neutronica	44

4	Conclusioni	47
A	Calcolo di integrale	49
B	Diagramma di Feynman per il contributo di secondo ordine	52

Introduzione

La definizione di un modello microscopico per un'accurata comprensione della struttura dello stato fondamentale e dello spettro di eccitazione dei nuclei è ancora un argomento di discussione. Idealmente, lo studio del problema nucleare dovrebbe essere risolto *ab initio*, cioè a partire da un Hamiltoniana che descriva l'interazione fra due (o tre) nucleoni nel vuoto e con l'uso di un metodo che introduca le giuste correlazioni per la soluzione del problema a molti corpi.

Molti sforzi sono stati spesi nella ricerca di un potenziale che modellasse bene l'interazione NN sulla base di esperimenti di scattering tra nucleoni. Come esempio, possiamo citare l'interazione Argonne v_{18} [1]: essa è composta da un termine elettromagnetico, una parte relativa al contributo dallo scambio di un pione ed un termine a breve range. Mentre il secondo termine si ottiene a partire dalla lagrangiana pione-nucleone della QCD (Quantum Chromodynamics), il termine a breve range risulta più difficilmente spiegabile a partire dallo studio delle interazioni fondamentali, ed è perciò spesso trattato fenomenologicamente (con metodi di Effective Field Theory, EFT) [2].

Esistono molti metodi *ab initio* per trattare il problema a molti corpi con interazioni di questo tipo (ad esempio, Green's Function Monte Carlo (GFMC) [3], metodo Brueckner [4], No Core Shell Model (NCSM) [5] o Coupled-Cluster (CC) [6]), ma in generale la richiesta computazionale per introdurre le correlazioni che rendono il nucleo un sistema fortemente legato è molto alta. Questo pone un limite al numero di nucleoni che possono essere studiati, il che rende questi schemi validi solo per nuclei leggeri.

Una via alternativa per lo studio del problema a molti corpi nucleare sono i metodi SCMF (self-consistent mean-field) [7]. Questi modelli consistono nella determinazione di un campo medio nucleare con l'uso di interazioni efficaci o funzionali della densità (DFT) costruiti *ad hoc*. I metodi SCMF sono inseriti nel quadro dell'approssimazione di particella indipendente; ciascun nucleone risente di un potenziale medio statico generato da tutte le altre particelle, che viene generalmente calcolato attraverso l'uso di metodi autoconsistenti, come il metodo HF (o Kohn-Sham nel caso di DFT). La forma dell'interazione efficace nucleare viene motivata da considerazioni *ab initio* e i parametri da cui dipende sono determinati in modo da soddisfare alcune proprietà nucleari [7].

L'approccio SCMF è stato largamente messo alla prova negli ultimi 40 anni. Il metodo ha permesso lo studio di nuclei pesanti, e ha contribuito alla conoscenza di nuclei lontani dalla stabilità [7]. Tali successi hanno spinto la costruzione di interazioni efficaci sempre più elaborate, tra quali ricordiamo, come principali, quelle di Skyrme [8] e di Gogny [9]. Il

modello ha ora raggiunto un punto nel quale, per migliorare la qualità dell'approssimazione, risulta probabilmente necessario introdurre correlazioni oltre il campo medio [7]. Tenere conto di tali effetti significa considerare un potenziale medio non più statico, ma capace di modificarsi dinamicamente a partire dalle interazioni fra le particelle che compongono il sistema.

Generalmente, nei metodi SCMF si fa uso di un potenziale efficace di interazione che includa una dipendenza dalla densità, che simuli un'interazione a più corpi. L'equazione di stato (EoS) che si ottiene è caratterizzata da una dipendenza più complessa dalla densità, e dunque da una maggiore flessibilità che le permette di descrivere accuratamente la materia nucleare. Purtroppo, l'utilizzo di interazioni dipendenti dalla densità rende ardua la possibilità di considerare termini successivi allo sviluppo HF, poichè in questi casi non è ben definita una teoria perturbativa [10]. Così, mentre stime di energia effettuate con metodi HF su questi potenziali restituiscono valori molto accurati, la predizione di altre osservabili risulta spesso difficile.

In questa tesi utilizziamo un potenziale di interazione semplificato che non presenti dipendenze dalla densità. Ci limitiamo allo studio di materia nucleare simmetrica omogenea, un sistema ideale infinito in cui la densità di protoni è uguale a quella dei neutroni; nel caso di materia uniforme, le funzioni d'onda sono approssimabili a onde piane. In particolare, viene preso un potenziale gaussiano, del tipo Brink e Boeker [11], che si presta ad essere trattato perturbativamente. L'obiettivo di questo lavoro è quello di caratterizzare il contributo perturbativo di secondo ordine all'equazione di stato. A tal fine, faremo uso di alcune proprietà nucleari note, che serviranno sia per determinare i parametri dell'interazione, sia per valutare la validità del modello.

Lo studio dell'equazione di stato in approssimazione HF con un potenziale Brink e Boeker ha portato buone predizioni per alcune proprietà nucleari, come l'incompressibilità nucleare e $M(\rho_c)$, che sono entrambi legati all'energia gigante di monopolo [12]. Il calcolo della massa efficace per un nucleone immerso nel potenziale di singola particella, invece, non ha dato risultati in accordo con i dati sperimentali: la causa potrebbe essere cercata nella mancata considerazione di alcuni effetti di correlazione.

In termini molto generali, studiare ordini perturbativi successivi al primo permette di considerare correlazioni in maniera esplicita rispetto all'approssimazione HF. In questo ultimo caso, tale complicate dipendenze sono contenute nei parametri del potenziale nel momento in cui vengono scelti in modo da soddisfare determinate proprietà nucleari. Questa operazione di trasferimento delle dipendenze di correlazione a termini più espliciti nell'equazione di stato permette all'espressione di migliorare le proprie capacità di predizione. Il nostro lavoro è un primo passo concreto in questa direzione.

Capitolo 1

Modello di campo medio

1.1 Approssimazione di particella indipendente

Un modello di particella indipendente (IPA) [13] è un qualunque formalismo in cui la funzione d'onda di un sistema di molte particelle è scritta come il prodotto di funzioni d'onda di singola particella. In realtà, come sappiamo, la funzione d'onda di un sistema di fermioni deve essere totalmente antisimmetrica: la funzione di ciascuna particella, quindi, dipende comunque dalla funzione d'onda degli altri corpi.

Il modello Hartree-Fock rappresenta un classico esempio di modello a particella indipendente. Esso consiste nel tradurre un problema ad A particelle interagenti con un potenziale a due corpi in N problemi di singola particella. Questo è reso possibile dal calcolo di un potenziale medio, risultato dell'interazione di tutte le particelle, nel quale ciascun corpo si muove indipendentemente dagli altri [14].

L'approssimazione di particella indipendente è un efficace punto di partenza con il quale è possibile applicare una grande varietà di tecniche per la descrizione di un sistema a molti corpi.

1.1.1 Hamiltoniana di un sistema a molti corpi

L'Hamiltoniana per un sistema di N corpi non relativistici che interagiscono tramite forze a due corpi in assenza di campo esterno è

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \sum_{\alpha=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} v(r_{\alpha}, r_{\beta}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Il termine cinetico agisce sulla α -esima particella, mentre il potenziale è un operatore a due corpi, e rappresenta l'interazione fra l' α -esima e la β -esima particella.

Nei sistemi di nostro interesse avremo a che fare con fermioni. In approssimazione di particella indipendente, la funzione d'onda di un sistema a molti corpi è il prodotto

antisimmetrico di funzioni d'onda di singola particella ϕ_i , cioè un determinante di Slater

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\mathbf{r}_1) & \phi_2(\mathbf{r}_1) & \cdots & \phi_N(\mathbf{r}_1) \\ \phi_1(\mathbf{r}_2) & \phi_2(\mathbf{r}_2) & \cdots & \phi_N(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{r}_N) & \phi_2(\mathbf{r}_N) & \cdots & \phi_N(\mathbf{r}_N) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p (-1)^p \phi_{p(1)}(\mathbf{r}_1) \dots \phi_{p(\alpha)}(\mathbf{r}_\alpha) \dots \phi_{p(N)}(\mathbf{r}_N),\end{aligned}\tag{1.2}$$

dove con p indichiamo la permutazione. Senza perdere di generalità, scegliamo ϕ_i in modo tale che formino un sistema ortonormale completo di stati, il che si traduce nella condizione

$$\int d^3\mathbf{r} \phi_i^*(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij},\tag{1.3}$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker.

Nello studio di un problema a molti corpi, l'obiettivo fondamentale è la ricerca degli autovalori e autovettori dell'Hamiltoniana, ovvero le soluzioni dell'equazione

$$H \Psi_n = E_n \Psi_n,\tag{1.4}$$

dove Ψ è la funzione d'onda totale del sistema. In IPA, le funzioni d'onda di singola particella ϕ_α sono scelte tali che Φ sia un'approssimazione di Ψ . La procedura più diffusa per determinare questi orbitali è quella HF, di cui faremo un accenno in uno dei seguenti paragrafi.

1.1.2 Materia nucleare simmetrica omogenea

In questa tesi limitiamo il nostro studio a materia nucleare simmetrica omogenea. Per materia nucleare simmetrica s'intende materia nucleare in cui per cui il numero di protoni è uguale a quello di neutroni; questa condizione è facilmente soddisfatta per nuclei più leggeri, ma diventa una cattiva approssimazione per nuclei più grandi. Con materia omogenea ci riferiamo alla caratteristica per cui la densità è uguale in ogni punto, il che introduce simmetria traslazionale al problema.

Possiamo rappresentare il nostro sistema come un insieme di nucleoni contenuti in un volume Ω , a cui fissiamo condizioni al contorno periodiche. Questo equivale a prendere materia nucleare infinita, cioè escludere gli effetti di bordo.

Per via della simmetria traslazionale, il momento è una quantità conservata: possiamo scegliere come autofunzioni di particella singola onde piane della forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{\Omega}}.\tag{1.5}$$

Per tener conto dei gradi di libertà di spin e isospin, è necessario considerarne il prodotto con le relative funzioni d'onda, che indichiamo con $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$ e $\chi_{\frac{1}{2}m_\tau}$.

Preso il volume Ω come un cubo di lato L , $\mathbf{k}$ ha come valori ammessi

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}. \quad (1.6)$$

Da questa espressione, deduciamo che il numero di stati per unità di volume nello spazio delle fasi è $\Omega/(2\pi)^3$. Tale osservazione risulta utile per convertire una somma sugli stati caratterizzati da $\mathbf{k}$ in integrali. Infatti, si avrà

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}. \quad (1.7)$$

Per un sistema di fermioni, il principio di esclusione di Pauli richiede che ciascuna particella sia caratterizzata da un set di numeri quantici diversi. La funzione d'onda di stato fondamentale di un nucleo è quindi caratterizzata da A nucleoni con i più piccoli valori di momento ammessi da tale principio. Pertanto, gli stati $\mathbf{k}$ occupati formano una sfera di raggio k_f e corrispondente energia E_f .

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha} 1 \\ &= 4 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}| < k_f} d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{2\Omega}{3\pi^2} k_f^3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Il 4 deriva dalla somma sui numeri quantici di spin e isospin. Otteniamo così un'espressione che lega il momento di Fermi con la densità di particelle:

$$\rho = \frac{A}{\Omega} = \frac{2k_f^3}{3\pi^2}. \quad (1.9)$$

1.2 Teoria delle perturbazioni

Una delle prime sfide da affrontare in un problema a molti corpi è la ricerca dell'energia di stato fondamentale E_0 di un sistema di particelle interagenti.

Generalmente si ha a che fare con sistemi descritti da Hamiltoniane di cui non si è in grado di dare una descrizione esatta, ma tali per cui si è in grado di trattare esattamente una versione opportunamente semplificata. In questi casi, possiamo scrivere l'Hamiltoniana H del sistema come somma di una Hamiltoniana H_0 di cui lo spettro è noto, e di un'interazione V in presenza della quale lo spettro non si può più calcolare esattamente:

$$H = H_0 + V. \quad (1.10)$$

Mostriamo ora come si ottengono le espressioni per il calcolo degli autovalori dell'Hamiltoniana H attraverso la teoria delle perturbazioni indipendente dal tempo di Rayleigh-Schrödinger.

1.2.1 Teoria perturbativa di Rayleigh-Schrödinger

Consideriamo un sistema nel quale lo spettro di un'Hamiltoniana H_0 sia esattamente noto e ortonormalizzato

$$\begin{aligned} H_0 |\Phi^{(0)}\rangle &= E_0 |\Phi^{(0)}\rangle \\ \langle \Phi_m^{(0)} | \Phi_n^{(0)} \rangle &= \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

e un'interazione V tale per cui lo spettro di $H = H_0 + V$ non si può più determinare con esattezza. L'idea del metodo perturbativo è di pesare il contributo dell'interazione V con un parametro λ , e di determinare gli autovalori di H con uno sviluppo in serie di λ .

Limitiamoci allo stato fondamentale dell'Hamiltoniana. Consideriamo perciò:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_0^{(0)} + \lambda E_0^{(1)} + \lambda^2 E_0^{(2)} + \dots \\ |\Phi_0\rangle &= |\Phi_0^{(0)}\rangle + \lambda |\Phi_0^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\Phi_0^{(2)}\rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Nel caso di uno spettro non degenerare, sostituendo gli sviluppi nell'Hamiltoniana di cui cerchiamo lo spettro, si ottiene

$$(H_0 + \lambda V)(|\Phi_0^{(0)}\rangle + \lambda |\Phi_0^{(1)}\rangle + \dots) = (E_0^{(0)} + \lambda E_0^{(1)} + \dots)(|\Phi_0^{(0)}\rangle + \lambda |\Phi_0^{(1)}\rangle + \dots). \quad (1.13)$$

Identificando termini dello stesso ordine in λ , si ottiene una sequenza di tante equazioni quanto è l'ordine dello sviluppo considerato.

$$\begin{aligned} (H_0 - E_0^{(0)}) |\Phi_0^{(0)}\rangle &= 0 \\ (H_0 - E_0^{(0)}) |\Phi_0^{(1)}\rangle &= (E_0^{(1)} - V) |\Phi_0^{(0)}\rangle \\ (H_0 - E_0^{(0)}) |\Phi_0^{(2)}\rangle &= (E_0^{(1)} - V) |\Phi_0^{(1)}\rangle + E_0^{(2)} |\Phi_0^{(0)}\rangle \\ &\vdots \\ (H_0 - E_0^{(0)}) |\Phi_0^{(i)}\rangle &= (E_0^{(1)} - V) |\Phi_0^{(i-1)}\rangle + E_0^{(2)} |\Phi_0^{(i-2)}\rangle + \dots + E_0^{(i)} |\Phi_0^{(0)}\rangle \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Tali equazioni possono essere risolte proiettando ciascuna equazione sull'autostato $|\Phi_0^{(0)}\rangle$ dell'Hamiltoniana imperturbata. Osserviamo infatti che tutti i termini dello sviluppo di $|\Phi_0\rangle$ successivi al primo possono essere scelti ortogonali al primo. Infatti, se $|\Phi_0^{(i)}\rangle$ è soluzione della i -esima equazione, lo è anche $|\Phi_0^{(i)'}\rangle = |\Phi_0^{(i)}\rangle + \alpha |\Phi_0^{(0)}\rangle$: basterà scegliere $\alpha = -\langle \Phi_0^{(0)} | \Phi_0^{(i)} \rangle$. Troviamo, così:

$$E_0^{(1)} = \langle \Phi_0^{(0)} | V | \Phi_0^{(0)} \rangle. \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \langle \Phi_0^{(0)} | V | \Phi_0^{(1)} \rangle. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Per il primo ordine, la correzione all'energia dell'Hamiltoniana imperturbata corrisponde ai termini diagonali del potenziale negli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata. Per ricavare la correzione all'energia del secondo ordine, risulta necessario trovare la correzione al primo ordine dell'autostato. Essa si ottiene dalla seconda delle (1.14), moltiplicando ambo i membri per l'inverso dell'operatore $(H_0 - E_0^{(0)})$. Nello spazio degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata questo operatore non è invertibile, ma osservando che

$$|\Phi_k^{(1)}\rangle = \sum_k |\Phi_k^{(0)}\rangle \langle \Phi_k^{(0)} | \Phi_0^{(1)} \rangle = \sum_{k \neq 0} |\Phi_k^{(0)}\rangle \langle \Phi_k^{(0)} | \Phi_0^{(0)} \rangle, \quad (1.17)$$

possiamo valutare l'operatore nel sottospazio ortogonale a $|\Phi_0^{(0)}\rangle$, dove è invertibile. Facendo uso la proprietà generale $f(H_0) |\Phi_k^{(0)}\rangle = f(E_k^{(0)}) |\Phi_k^{(0)}\rangle$ La correzione all'autostato risulta

$$\begin{aligned} |\Phi_0^{(1)}\rangle &= \sum_{k \neq 0} \frac{1}{H_0 - E_0^{(0)}} |\Phi_k^{(0)}\rangle \langle \Phi_k^{(0)} | (E_0^{(1)} - V) | \Phi_0^{(0)} \rangle \\ &= \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \Phi_k^{(0)} | V | \Phi_0^{(0)} \rangle}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} |\Phi_k^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Come si nota, la perturbazione modifica lo stato presente assegnando al nuovo stato componenti lungo tutti gli altri stati. Per la correzione dell'energia al secondo ordine abbiamo quindi (eliminando l'apice relativo all'ordine di perturbazione, adesso pari a (0) per tutti i termini)

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \langle \Phi_0 | V \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \Phi_k | V | \Phi_0 \rangle}{E_0 - E_k} | \Phi_k \rangle \\ &= \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \Phi_0 | V | \Phi_k \rangle \langle \Phi_k | V | \Phi_0 \rangle}{E_0 - E_k}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

L'energia del sistema nello stato fondamentale, approssimato al secondo ordine perturbativo e calcolato negli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, risulta perciò

$$E_{GS} = E_0 + \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle + \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \Phi_0 | V | \Phi_k \rangle \langle \Phi_k | V | \Phi_0 \rangle}{E_0 - E_k}. \quad (1.20)$$

1.2.2 Metodo Hartree-Fock

Il metodo Hartree-Fock è la procedura più diffusa per determinare l'insieme di autofunzioni d'onda di singola particella ϕ_α in modo che il loro prodotto antisimmetrico costituisca una buona approssimazione della autofunzione d'onda totale del sistema.

Consideriamo un sistema descritto da un'Hamiltoniana (1.1). La teoria HF parte dall'assunzione che l'autofunzione del sistema sia un determinante di Slater; le autofunzioni di singola particella vengono quindi scelte seguendo il criterio di minimizzare l'energia del sistema.

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | T | \Phi \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha}^A \langle \Phi | \nabla_{\alpha}^2 | \Phi \rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha}^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \langle \phi_{p(1)} \dots \phi_{p(A)} | \nabla_{\alpha}^2 | \phi_{p'(1)} \dots \phi_{p'(A)} \rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha}^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \delta_{pp'} \langle \phi_{\alpha} | \nabla_{\alpha}^2 | \phi_{\alpha} \rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha}^A \langle \phi_{\alpha} | \nabla_{\alpha}^2 | \phi_{\alpha} \rangle.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Il calcolo per l'operatore a due corpi può essere sviluppato allo stesso modo, facendo attenzione al fatto che qui la permutazione sul ket può differire per uno scambio di particelle, il che aggiunge un termine all'espressione finale.

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | V | \Phi \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta}^A \langle \Phi | v(r_{\alpha}, r_{\beta}) | \Phi \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta}^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \langle \phi_{p(1)} \dots \phi_{p(A)} | v(r_{\alpha}, r_{\beta}) | \phi_{p'(1)} \dots \phi_{p'(A)} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta}^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \delta_{pp'} \langle \phi_{\alpha} \phi_{\beta} | v(r_{\alpha}, r_{\beta}) | \phi_{\alpha} \phi_{\beta} - \phi_{\beta} \phi_{\alpha} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta}^A \langle \phi_{\alpha} \phi_{\beta} | v(r_{\alpha}, r_{\beta}) | \phi_{\alpha} \phi_{\beta} - \phi_{\beta} \phi_{\alpha} \rangle.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Nella definizione di (1.2) abbiamo richiesto che le funzioni d'onda di singola particella siano un insieme di funzioni ortonormali. Tale condizione è matematicamente soddisfatta con l'uso del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Nel nostro caso, l'espressione che vogliamo minimizzare sarà, quindi

$$E = E_{HF} - \lambda \sum_{\alpha} \int d^3 \mathbf{r} \phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) \phi_{\alpha}(\mathbf{r}). \tag{1.23}$$

Eseguendo una variazione della funzione d'onda di singola particella arriviamo ad un'equazione di Schrödinger, l'equazione di Hartree-Fock

$$h_{\alpha} \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha} \phi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, A, \tag{1.24}$$

dove h_{α} è l'Hamiltoniana relativa alla particella α , e

$$h_{\alpha} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\alpha}^2 + u_{HF}[\phi_{\alpha}]. \tag{1.25}$$

$$u_{HF}[\phi_\alpha] = \sum_{\beta}^A \int d^3\mathbf{r}' \phi_{\beta}^*(\mathbf{r}') v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\phi_{\beta}(\mathbf{r}') \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \phi_{\beta}(\mathbf{r}) \phi_{\alpha}(\mathbf{r}')] . \quad (1.26)$$

Come si vede, il potenziale Hartree-Fock u_{HF} dipende dalle funzioni d'onda di singola particella, ed è formato da due parti. Il primo integrale è detto *termine di Hartree*, e rappresenta l'interazione della particella con la distribuzione di nucleoni che nella coordinata $\mathbf{r}$ ha densità $\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})$. Il secondo integrale, il *termine di Fock*, è la parte non classica dell'interazione, e nasce dalla natura fermionica della materia nucleare.

Per via della dipendenza di u_{HF} da ϕ_α , l'equazione di Hartree-Fock può essere risolta iterativamente a partire da un insieme di funzioni di singola particella di prova. Si ottiene una soluzione quando l'equazione restituisce come output le stesse funzioni d'onda immesse come input.

Il determinante di Slater Φ ottenuto dalle funzioni d'onda di singola particella ricavate con il metodo rappresenta un'approssimazione della funzione d'onda reale del sistema. Si definisce, così:

$$E_{HF} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha}^A \langle \phi_{\alpha} | \nabla_{\alpha}^2 | \phi_{\alpha} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta}^A \langle \phi_{\alpha} \phi_{\beta} | v(r_{\alpha}, r_{\beta}) | \phi_{\alpha} \phi_{\beta} - \phi_{\beta} \phi_{\alpha} \rangle . \quad (1.27)$$

Questa formulazione non tiene conto che la distribuzione di probabilità di ciascuna particella dovrebbe essere funzione della posizione di tutte le altre particelle. In altre parole, la probabilità che un nucleone occupi un particolare elemento di volume deve essere *correlata* alle probabilità relative alle posizioni degli altri nucleoni. Si definisce energia di correlazione la differenza fra l'energia esatta del sistema e l'energia del sistema ottenuta con il metodo HF, cioè

$$E_{corr} = E_{esatta} - E_{HF} . \quad (1.28)$$

1.2.3 Hamiltoniana imperturbata di HF

Al fine di migliorare la qualità dell'approssimazione, decidiamo di prendere come Hamiltoniana imperturbata del sistema l'Hamiltoniana di singola particella h di (1.25). Questa scelta corrisponde a richiedere che l'approssimazione introdotta dalla presenza di un potenziale medio costituisca la parte del sistema di cui sappiamo esattamente calcolare lo spettro, mentre un opportuno potenziale a due corpi viene trattato perturbativamente. A partire dall'Hamiltoniana (1.1), consideriamo quindi

$$\begin{aligned} H &= H_0 + U_{HF} + (V - U_{HF}) \\ &= H'_0 + V', \end{aligned} \quad (1.29)$$

dove U_{HF} è definito come la somma su tutte le particelle del potenziale di singola particella u_{HF} : H'_0 corrisponde perciò alla somma su tutti i nucleoni dell'Hamiltoniana di singola particella h . Gli autostati della nuova Hamiltoniana imperturbata sono quindi

i determinanti di Slater Φ ottenuti con il metodo HF, mentre il valore di aspettazione è proprio l'energia di Hartree-Fock (consideriamo lo stato fondamentale del sistema).

$$E_0^{(0)} = E_{HF0}. \quad (1.30)$$

Il primo termine dello sviluppo perturbativo si ottiene calcolando il prodotto bracket del potenziale V' sugli autostati di Hamiltoniana imperturbata, come in (1.15). In questi stati, per costruzione, gli elementi di matrice di V e U sono uguali

$$E_0^{(1)} = \langle \Phi_0 | V - U_{HF} | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (1.31)$$

La prima correzione introdotta dagli effetti correlativi all'energia di Hartree-Fock compare al secondo ordine perturbativo. L'espressione da valutare è quella in (1.19). Il potenziale di singola particella assume valori nulli se calcolato fra autostati diversi, quindi il termine di secondo ordine assume la forma

$$E_0^{(2)} = \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \Phi_0 | V | \Phi_k \rangle \langle \Phi_k | V | \Phi_0 \rangle}{\epsilon_0 - \epsilon_k}. \quad (1.32)$$

L'energia che compare al denominatore è l'energia dell'Hamiltoniana imperturbata, cioè, in questo caso, E_{HF} . In conclusione, l'energia totale del sistema sviluppata al secondo ordine perturbativo del potenziale a due corpi, in questa approssimazione, sarà nella forma

$$E_0 = E_{HF0} + E_0^{(2)}. \quad (1.33)$$

Il contributo all'energia di secondo ordine corregge l'energia HF con alcuni effetti di correlazione, come è mostrato (1.28).

1.3 Interazioni efficaci

Calcoli SCMF per nuclei a shell chiuse furono intrapresi per la prima volta intorno alla metà del 1960 [7]. Il potenziale NN usato nel procedimento iterativo era ottenuto da esperimenti di scattering nel vuoto e trattato *ab initio*. Come accennato nell'introduzione, in assenza di impegnativi metodi computazionali questo tipo di approccio non restituisce i risultati sperati.

La situazione cambiò quando si decise di abbandonare l'uso di potenziali realistici ottenuti nel vuoto e di adottare interazioni costruite *ad hoc*. Tali espressioni dipendono da un numero variabile di parametri liberi che possono essere scelti sulla base delle osservabili che l'interazione deve riprodurre.

Interazioni a zero-range vennero per la prima volta introdotte da T. Skyrme [8]. Questi potenziali parametrizzano la dipendenza fra la distanza relativa attraverso distribuzioni a delta di Dirac; tale caratteristica garantisce che i termini di scambio hanno la stessa struttura dei termini diretti, il che semplifica notevolmente i calcoli [7]. Un'alternativa è rappresentata dall'interazione a range finito proposta da Gogny (Gogny force) [9], che estese il semplice potenziale di Brink e Boeker [11]. Per entrambe le interazioni il termine

spaziale è modellato da funzioni gaussiane, il che le rende vicine a quanto ci si aspetta per un'interazione reale. La nostra tesi si concentra su interazioni a range finito, ed in particolare sul modello di Brink e Boeker.

1.3.1 Interazione Brink e Boeker

Negli anni '60 D. M. Brink e E. Boeker proposero alcune espressioni semplici per modellizzare l'interazione nucleone-nucleone [11]. Una di queste è una somma di due gaussiane, pesate diversamente attraverso i parametri S_i ed m_i

$$V(r) = \sum_{i=1,2} \left(S_i(1 - m_i)e^{-\frac{r^2}{\mu_i^2}} + S_i m_i e^{-\frac{r^2}{\mu_i^2}} P_M \right), \quad (1.34)$$

dove μ_i è il range dell'interazione nucleare e P_M è l'operatore di scambio di momenti. r è il modulo della distanza tra le due particelle. Nel loro lavoro, i valori numerici di S ed m vennero scelti in modo che l'interazione riproducesse l'energia di stato fondamentale e degli stati eccitati in approssimazione Hartree-Fock per ${}^4\text{He}$ e materia nucleare. Questo viene fatto per fissati valori di μ_1 e μ_2 , presi in un intervallo di valori fisicamente ammessi, cioè $0.4 < \mu < 1.4$ fm. Il potenziale così ottenuto, però, riesce a riprodurre solo in parte i dati sperimentali di nuclei più pesanti.

1.3.2 Interazione Gogny

L'interazione di Brink e Boeker, per la sua semplicità, non permette di riprodurre con precisione le energie di binding al livello di approssimazione di Hartree-Fock. Dechargé e Gogny suggerirono l'introduzione nell'espressione di un termine dipendente dalla densità e un termine di spin-orbita e proposero quindi una nuova parametrizzazione per l'interazione [9]:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, \rho) = & \sum_{i=1,2} (W_i + B_i P_\sigma - H_i P_\tau - M_i P_\sigma P_\tau) e^{-\frac{r^2}{\mu_i^2}} \\ & + \sum_{i=1,2} t_0^i (1 + x_0^i P_\sigma) \rho^{\alpha_i} \delta(\mathbf{r}) \\ & + iW_0(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot [\mathbf{k}' \times \delta(\mathbf{r})\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

W_i , B_i , H_i , M_i , t_0^i , x_0^i , α e W_0 sono parametri costanti dell'interazione. $\mathbf{k}$ è il momento relativo. P_σ e P_τ sono gli operatori di scambio di spin e isospin, e sono definiti

$$\begin{aligned} P_\sigma &= \frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}, \\ P_\tau &= \frac{1 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Generalmente, si scelgono $\mu \approx 0.5 - 0.7$ fm e $\mu_2 \approx 1 - 1.2$ fm, in modo da riprodurre la componente a breve e a lungo range dell'interazione. La prima parte della forza di Gogny

è un termine a range finito, modellato da due gaussiane, che include operatori di scambio (iso)spin. Il secondo elemento che compare nella espressione è il contributo dipendente dalla densità, a zero range, responsabile delle correlazioni a tre corpi. Infine, il terzo termine rappresenta la parte di spin-orbita, ed è una funzione del momento relativo.

E' facile accorgersi che il potenziale di Brink e Boeker si riduce ad un'opportuna semplificazione di (1.35). Ponendo B_i , H_i , t_0^i e W_0 uguali a 0, otteniamo

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2} (W_i + M_i P_M) e^{-\frac{r^2}{\mu_i}}, \quad (1.37)$$

che riproduce (1.34) con $W_i = S_i(1 - m_i)$ e $M_i = S_i m_i$.

Capitolo 2

Calcolo perturbativo dell'energia

Procediamo con il calcolo di (1.33). Come abbiamo discusso nel paragrafo su HF, come funzione d'onda totale usiamo un determinante di Slater le cui funzioni d'onda di singola particella sono onde piane (1.5) (materia nucleare omogenea). Dobbiamo eseguire il calcolo dell'energia HF e del termine perturbativo del potenziale di secondo ordine. Si tratta di calcolare gli elementi di matrice del termine cinetico e del potenziale, ed eseguire esplicitamente le somme su tutte le particelle che compongono il sistema. In particolare, dovremo considerare anche le somme sui numeri quantici di spin e isospin.

2.1 Energia di Hamiltoniana imperturbata

Cominciamo con il primo termine di (1.33), che nella nostra scelta di l'Hamiltoniana imperturbata (1.25) corrisponde con il calcolo dell'energia di HF (1.27) per lo stato fondamentale.

2.1.1 Termine cinetico

Riportiamo il calcolo degli elementi di matrice del termine cinetico dell'Hamiltoniana di (1.1). Facendo uso di (1.21), possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\langle \Phi | T | \Phi \rangle &= \sum_{\alpha=1}^A \langle \phi_{\alpha} | \frac{\hbar^2 k^2}{2m} | \phi_{\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\Omega} d^3 \mathbf{r} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{\Omega}} k^2 \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{\Omega}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \sum_{m_s} \mathbb{1} \sum_{m_{\tau}} \mathbb{1} \int_{\mathbf{k} < k_f} d^3 \mathbf{k} k^2 \\ &= \frac{\hbar^2 \Omega}{4m\pi^2} \cdot 4 \int_0^{k_f} dk k^4 \\ &= \frac{\hbar^2 \Omega}{5m\pi^2} k_f^5.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Per il passaggio dal calcolo di una somma a quello del corrispondente integrale abbiamo preso (1.7). Facendo uso della relazione fra densità e il momento di Fermi di (1.9), otteniamo

$$\langle \Phi | T | \Phi \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} k_f^2 \Omega \rho. \quad (2.2)$$

Ricordando infine che $A = \Omega \rho$ (1.9), otteniamo l'energia cinetica media per particella:

$$\langle t \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} k_f^2. \quad (2.3)$$

2.1.2 Termine di potenziale

L'espressione del termine di potenziale per l'energia HF è il secondo termine di (1.27), che possiamo riscrivere in termini dell'operatore di scambio $P_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta}^N \langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\alpha \phi_\beta - \phi_\beta \phi_\alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) (1 - P_{\alpha\beta}) | \phi_\alpha \phi_\beta \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Gli autostati che caratterizzano il sistema hanno dipendenza da momento, spin e isospin. La somma riguarda tutte le particelle, ed è pertanto eseguita su tutti i numeri quantici che caratterizzano il sistema, cioè

$$|\phi_\alpha\rangle = |k_\alpha \frac{1}{2} m_{s\alpha} \frac{1}{2} m_{\tau\alpha}\rangle. \quad (2.5)$$

$$\sum_{\alpha\beta} = \sum_{k_\alpha k_\beta} \sum_{m_{s\alpha} m_{s\beta}} \sum_{m_{\tau\alpha} m_{\tau\beta}}. \quad (2.6)$$

Il nostro potenziale agisce come l'identità sui termini di spin e isospin, quindi avremo:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{k_\alpha k_\beta} \left[\langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | k_\alpha k_\beta \rangle \sum_{m_{s\alpha} m_{s\beta}} \mathbb{1} \sum_{m_{\tau\alpha} m_{\tau\beta}} \mathbb{1} + \right. \\ &\quad \left. - \langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) P_M | k_\alpha k_\beta \rangle \sum_{m_{s\alpha} m_{s\beta}} \delta_{m_{s\alpha} m_{s\beta}} \sum_{m_{\tau\alpha} m_{\tau\beta}} \delta_{m_{\tau\alpha} m_{\tau\beta}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k_\alpha k_\beta} [16 \langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | k_\alpha k_\beta \rangle - 4 \langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) P_M | k_\alpha k_\beta \rangle]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nell'espressione del potenziale di Brink e Boeker compare l'operatore di scambio delle coordinate P_M . Da ciò segue che, per poter trattare separatamente gli elementi di matrice diretti da quelli di scambio, è necessario scrivere esplicitamente il potenziale. L'energia al primo ordine perturbativo si riduce quindi alla somma di due termini, ottenuti dal

rimescolamento del termine di Hartree e del termine di Fock al fine di separare gli elementi di matrice diretti da quelli ottenuti tramite scambio di particelle. Preso

$$v(r_\alpha, r_\beta) = (W + MP_M)f(r), \quad (2.8)$$

si avrà

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \cdot 4 \sum_{k_\alpha k_\beta} [(4W - M) \langle k_\alpha k_\beta | f(r) | k_\alpha k_\beta \rangle - (W - 4M) \langle k_\alpha k_\beta | f(r) | k_\beta k_\alpha \rangle]. \quad (2.9)$$

Sostituendo a M e W le costanti moltiplicative presenti nel nostro potenziale, otteniamo

$$\langle V \rangle = 2 \sum_{k_\alpha k_\beta} \left[S(4 - 5m) \langle k_\alpha k_\beta | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | k_\alpha k_\beta \rangle + S(5m - 1) \langle k_\alpha k_\beta | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | k_\beta k_\alpha \rangle \right]. \quad (2.10)$$

Lo sviluppo esplicito di questa espressione si riduce al calcolo di integrali sulle posizioni e sui momenti della funzione gaussiana da noi considerata. Riportiamo di seguito il contributo totale della perturbazione al primo ordine per particella [15] [12] (poniamo $x = \mu k_f$):

$$\langle v \rangle = S(4 - 5m) \frac{\mu^3 \pi^{3/2}}{8} \rho + S(5m - 1) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} g(x). \quad (2.11)$$

$$g(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} - \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) e^{-x^2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x). \quad (2.12)$$

2.1.3 Equazione di stato

L'equazione di stato per materia nucleare restituisce l'energia per nucleone $e(\rho)$ in funzione della densità. In approssimazione HF, l'equazione di stato è composta da tre termini: il termine cinetico (2.3) e due termini di potenziale (2.11):

$$\begin{aligned} e(\rho) &= \langle t \rangle + \langle v \rangle \\ &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + S(4 - 5m) \frac{\mu^3 \pi^{3/2}}{8} \rho - S(1 - 5m) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} g(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Come osserviamo, il termine ottenuto dall'interazione diretta è dominante per alte densità sul termine di scambio, ed ha un andamento lineare. Il secondo termine del potenziale, invece, prevale sul contributo diretto a densità più piccole. Come si può facilmente verificare dall'espressione (2.12) di $g(x)$, che riassume tutte le dipendenze da ρ , il limite per $x \rightarrow 0$ è 0.

Nel caso di un potenziale a range finito, la condizione di saturazione è soddisfatta dalla presenza del termine di scambio del potenziale [15]. Il termine cinetico e il termine di potenziale diretto contribuiscono con un andamento repulsivo proporzionale rispettivamente a $\rho^{2/3}$ e ρ per alte densità, mentre vicino alla densità di saturazione, dove il contributo diretto è trascurabile, il termine di scambio riesce a bilanciare il termine cinetico.

I parametri S ed m da cui dipende l'espressione sono stati trovati in [12] richiedendo che essa soddisfacesse alcune proprietà empiriche per la materia nucleare, come l'energia e la densità in condizione di saturazione. Nella tesi a cui facciamo referenza si è considerato come range nucleare $\mu = 0.834 \text{ fm}$, e si è trovato

$$\begin{aligned} S &= -430 \text{ MeV}. \\ m &= 1.32. \end{aligned} \tag{2.14}$$

da cui segue che effettivamente il termine diretto di potenziale è repulsivo, mentre il termine di scambio è attrattivo. A densità infinitesime, è presente solo il contributo di $\langle t \rangle$: il sistema è ovviamente non legato. Mano a mano che la densità aumenta, l'energia per nucleone decresce, poichè il termine di scambio di $\langle v \rangle$ domina sul termine diretto (e sul termine cinetico). A densità più alte, il termine diretto finisce per prevalere, con $e(\rho)$ che aumenta linearmente con ρ . In questo modello, perciò, l'esistenza di uno stato legato è garantita dalla presenza del termine di scambio.

La situazione di saturazione può essere soddisfatta anche con potenziali che non includano il termine di scambio. Si può mostrare, infatti, che lo stato legato può essere garantito con un potenziale a zero range che sia dipendente dalla densità o dalla velocità.

2.2 Sviluppo perturbativo al secondo ordine

Si tratta di calcolare la seconda parte di (1.33). Al secondo ordine perturbativo, gli elementi di matrice vanno calcolati tra stati diversi. In teoria delle perturbazioni, l'energia è data da (1.19)

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \Phi_0 | V | \Phi_k \rangle \langle \Phi_k | V | \Phi_0 \rangle}{\epsilon_0 - \epsilon_k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\gamma\delta} \sum_{\alpha\beta} \frac{\langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle_{AS} \langle \phi_\gamma \phi_\delta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\alpha \phi_\beta \rangle_{AS}}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo effettuato gli stessi passaggi di (1.22). In questo caso, il calcolo degli elementi di matrici del potenziale è da effettuare fra stati (antisimmetrici) con diverso valore di momento. Questa differenza, in realtà, riguarda solo le particelle α e β , per cui otteniamo facilmente lo stesso risultato di (1.22).

Scriviamo il numeratore in una forma più conveniente. Facendo uso del fatto che lo scambio di due numeri quantici nel ket introduce un fattore di fase, che al modulo quadro è ininfluenza, otteniamo

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle_{AS} \langle \phi_\gamma \phi_\delta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\alpha \phi_\beta \rangle_{AS}, \\ &= 2 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle \langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle_{AS}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Inserendo questa espressione nella precedente, arriviamo alla seguente formula per il termine di energia del secondo ordine:

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[\frac{\langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle \langle \phi_\gamma \phi_\delta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\alpha \phi_\beta \rangle}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle \phi_\alpha \phi_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle \langle \phi_\gamma \phi_\delta | v(r_\alpha, r_\beta) | \phi_\beta \phi_\alpha \rangle}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ricordiamo che, in questa notazione, la somma è estesa ai momenti, nonchè alle proiezioni di spin e isospin. Per prima cosa, valutiamo i contributi dati dalle somme su questi ultimi due.

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta} \left[\frac{|\langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | k_\gamma k_\delta \rangle|^2}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} \sum_{\substack{m_{s_\alpha} m_{s_\beta} \\ m_{s_\gamma} m_{s_\delta}}} \delta_{m_{s_\alpha} m_{s_\gamma}} \delta_{m_{s_\beta} m_{s_\delta}} \sum_{\substack{m_{\tau_\alpha} m_{\tau_\beta} \\ m_{\tau_\gamma} m_{\tau_\delta}}} \delta_{m_{\tau_\alpha} m_{\tau_\gamma}} \delta_{m_{\tau_\beta} m_{\tau_\delta}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | k_\gamma k_\delta \rangle \langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) P_M | k_\gamma k_\delta \rangle}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} \sum_{m_{s_\gamma} m_{s_\delta}} \delta_{m_{s_\gamma} m_{s_\delta}} \sum_{m_{\tau_\gamma} m_{\tau_\delta}} \delta_{m_{\tau_\gamma} m_{\tau_\delta}} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nel secondo passaggio, la somma sulle proiezioni dei momenti di spin di ciascuna particella è stata ridotta alla somma sui momenti di due sole particelle facendo uso del fatto che $\delta_{m_{s_\alpha} m_{s_\gamma}} \delta_{m_{s_\beta} m_{s_\delta}} \delta_{m_{s_\alpha} m_{s_\delta}} \delta_{m_{s_\beta} m_{s_\gamma}} = \delta_{m_{s_\gamma} m_{s_\delta}}$, fissato $m_{s_\alpha} = m_{s_\gamma}$ e $m_{s_\beta} = m_{s_\delta}$ ovunque. Si ottiene

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta} \left[16 \frac{|\langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | k_\gamma k_\delta \rangle|^2}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} + \right. \\ \left. - 4 \frac{\langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) | k_\gamma k_\delta \rangle \langle k_\alpha k_\beta | v(r_\alpha, r_\beta) P_M | k_\gamma k_\delta \rangle}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} \right]. \quad (2.19)$$

Come prima, con il potenziale di Brink e Boeker è necessario fare attenzione agli operatori di scambio che nascono dall'antisimmetrizzazione dello stato e dal termine P_M derivante direttamente dal potenziale.

Con il potenziale di (2.8), abbiamo

$$E_0^{(2)} = 2 \sum_{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta} \left[(4W^2 - MW) \frac{|\langle k_\alpha k_\beta | f(r) | k_\gamma k_\delta \rangle|^2}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} + \right. \\ + (8MW - W^2 - M^2) \frac{\langle k_\alpha k_\beta | f(r) | k_\gamma k_\delta \rangle \langle k_\alpha k_\beta | f(r) P_M | k_\gamma k_\delta \rangle}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} + \\ \left. + (4M^2 - WM) \frac{|\langle k_\alpha k_\beta | f(r) | k_\delta k_\gamma \rangle|^2}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} \right], \quad (2.20)$$

che, con le costanti proprie del potenziale di Brink e Boeker, diventa

$$E_0^{(2)} = \sum_{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta} 2S^2(4 + 5m^2 - 9m) \frac{|\langle k_\alpha k_\beta | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | k_\gamma k_\delta \rangle|^2}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} + \\ + \sum_{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta} 2S^2(-1 - 10m^2 + 10m) \frac{\langle k_\alpha k_\beta | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | k_\gamma k_\delta \rangle \langle k_\alpha k_\beta | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | k_\delta k_\gamma \rangle}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} \quad (2.21) \\ + \sum_{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta} 2S^2(5m^2 - m) \frac{|\langle k_\alpha k_\beta | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | k_\delta k_\gamma \rangle|^2}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta}.$$

Nei prossimi paragrafi calcoleremo esplicitamente questi tre termini. Ci riferiremo al primo come termine diretto, e sarà indicato con $\langle V_q \rangle$, ed al secondo come termine di scambio $\langle V_{k+l-q} \rangle$. Il terzo termine sarà calcolato alla fine, e chiamato $\langle V_q \rangle^{(2)}$.

2.2.1 Energia di singola particella

Come abbiamo visto nella sezione riguardante la teoria perturbativa, le energie di singola particella presenti al denominatore di (2.21) sono prese in approssimazione HF [16],

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_{HF}, \quad (2.22)$$

dove il potenziale di singola particella HF possiede una dipendenza dal momento e dal momento di Fermi. Così, il denominatore di (2.21) avrà la forma:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 l^2}{2m} - \frac{\hbar^2 (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{2m} - \frac{\hbar^2 (\mathbf{l} - \mathbf{q})^2}{2m} + U_{HF}(k) + U_{HF}(l) - U_{HF}(k+q) - U_{HF}(k-l). \quad (2.23)$$

La dipendenza del U_{HF} momento è complicata, e rende il calcolo delle somme sui momenti del termine di secondo ordine un'operazione formidabile.

Una via alternativa è essere quella di considerare una massa efficace che racchiuda nella sua definizione il contributo dei termini di potenziale. In altre parole, si tratta di calcolare $m^*(k)$ tale che soddisfi l'identità

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_{HF}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*(k)}. \quad (2.24)$$

Se la variazione di questa quantità rispetto al momento è tale da poter essere considerata trascurabile, la correzione Hartree-Fock all'energia di singola particella si tradurrà in un fattore di riscaldamento sulla massa, e quindi una notevole semplificazione dei conti. Di seguito riportiamo l'espressione per la massa efficace in approssimazione HF (dove $q = \mu k$ e $q_f = \mu k_f$).

$$\frac{m^*(k)}{m} = \left(1 + \frac{m}{\hbar^2} S(5m-1) \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} h(q, q_f) \right). \quad (2.25)$$

$$h(q, q_f) = \frac{1}{q^3} \left[(2 - qq_f) e^{-\frac{(q-q_f)^2}{4}} - (2 + qq_f) e^{-\frac{(q+q_f)^2}{4}} \right]. \quad (2.26)$$

In figura 2.1 si può osservare l'andamento di questa quantità al variare del momento

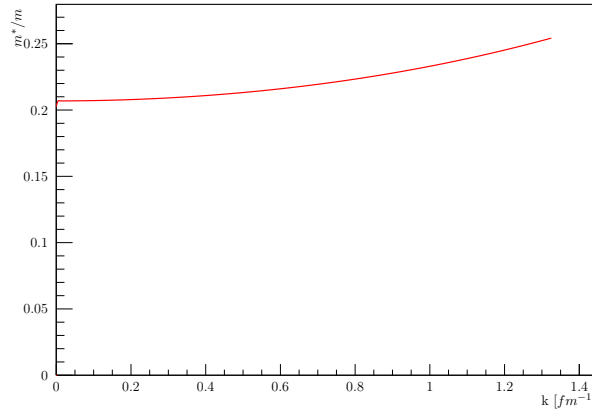


Figura 2.1: Rapporto fra la massa efficace e la massa per valori di momento fino a k_f alla condizione di saturazione.

per la densità di saturazione. Come si può notare, nell'intervallo $0 < k < k_f$, cioè quello su cui verranno fatte le somme, $m^*(k)/m$ assume valori tra 0.21 e 0.25, cioè varia del

15%. Concludiamo che, in buona approssimazione, $m^*(k)$ risulta costante al variare del momento, cioè possiamo riscrivere i primi due termini di (2.23) nella forma

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_1^*} + \frac{\hbar^2 l^2}{2m_2^*}. \quad (2.27)$$

Restringendosi alla sola densità di saturazione, per trovare il valore medio di $m^*(k)/m$ è necessario risolvere numericamente l'integrale della funzione fra 0 e k_f . Dividendo il risultato per l'intervallo di integrazione, otteniamo

$$\left\langle \frac{m^*}{m} \right\rangle_{\rho=\rho_0} \approx 0.22. \quad (2.28)$$

Osserviamo ora i termini rimanenti. In questo caso, l'andamento di m^*/m è da valutare per valori di momento compresi tra k_f e $k_f + q$. Si vedrà in seguito, più nello specifico, che per valori di q molto maggiori di 1 gli integrali da eseguire sui momenti assumono valori trascurabili. Adottiamo qui l'approssimazione di considerare, per tutti i termini (e alla densità di saturazione), la massa efficace trovata per le particelle allo stato iniziale.

Il risultato ottenuto risulta una buona approssimazione della correzione alla massa per la densità di saturazione. Per poter valutare l'energia del secondo ordine a densità diverse da quella di saturazione, è necessario ripetere i conti appena effettuati per ogni valore di densità (e quindi di k_f) considerato. Si può far vedere, comunque, che l'integrale effettuato per valori di k_f corrispondenti a densità tra 0 e 0.5 fm^{-3} (diviso per il corrispondente intervallo di integrazione) restituisce valori di m^*/m che non si discostano mai per più del 15% del valore ottenuto alla saturazione.

2.2.2 Momento trasferito

Nel calcolo del termine di secondo ordine allo sviluppo perturbativo dell'energia, la natura fermionica delle particelle che compongono il sistema determina la presenza di stati antisimmetrici (indicati come AS). La ragione di questo risiede nel calcolo delle permutazioni del determinante di Slater, come si è visto per gli elementi di matrice del potenziale in approssimazione HF (1.22).

Per questo motivo, nell'espressione (2.21) abbiamo a che fare con il calcolo di due diversi elementi di matrice, corrispondenti alle seguenti situazioni:

- La posizione delle particelle nello stato finale del sistema coincide con la posizione nello stato iniziale (caso diretto).
- La posizione delle particelle nello stato finale del sistema è scambiata rispetto alla posizione nello stato iniziale (caso di scambio).

Per capire meglio la differenza fra i due casi, schematizziamo l'interazione fra due particelle con i diagrammi di Feynman. Questi schemi permettono di visualizzare l'ampiezza di scattering di un processo definito da stati iniziali e finali: una riga ondulata rappresenta

l'interazione (e può coincidere con lo scambio di una particella mediatrice), mentre linee entranti e uscenti indicano le particelle. La coordinata temporale scorre dal basso verso l'alto.

L'interazione che prendiamo in considerazione è una funzione gaussiana. Siccome questo operatore non ha effetto sulla dinamica del centro di massa (o sugli autovalori di spin) poichè dipende solo dal modulo della coordinata relativa, risulta rispettata la conservazione di momento lineare (e di spin). Prese due particelle di momento iniziale $\mathbf{k}$ e $\mathbf{l}$ e momento finale $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, avremo quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{k} + \mathbf{l} &= \mathbf{m} + \mathbf{n}. \\ \sigma_k + \sigma_l &= \sigma_m + \sigma_n.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Per questo motivo, risulta conveniente esprimere il momento finale di ciascuna particella in termini di una quantità $\mathbf{q}$ ceduta o acquistata durante l'interazione. Così, ad esempio, si avrà $\mathbf{m} = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ e $\mathbf{n} = \mathbf{l} - \mathbf{q}$.

In figura 2.2 è rappresentato il diagramma di Feynman relativo al caso diretto.

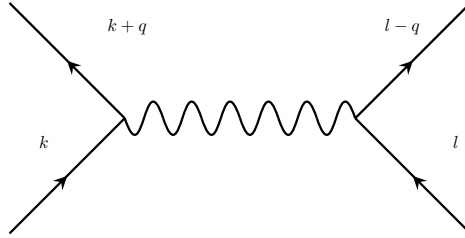


Figura 2.2: Interazione diretta

Tramite l'interazione, la particella di momento $\mathbf{l}$ cede una quantità di momento pari $\mathbf{q}$ alla particella di momento $\mathbf{k}$. Come si vede, la somma totale del momento allo stato finale è ancora $\mathbf{k} + \mathbf{l}$, e in questo caso il momento trasferito è proprio $\mathbf{q}$.

La situazione del caso di scambio è differente. Come si vede in figura (2.3), in questo caso il momento trasferito nell'interazione è $\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{l}$. Questi risultati rivestono un'importanza

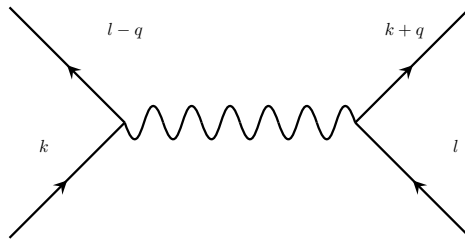


Figura 2.3: Interazione di scambio

fondamentale nei conti a seguire. Come vedremo, l'espressione degli elementi di matrice di potenziale dei due casi sopracitati risulterà analoga a patto di prendere le giuste espressioni per il momento trasferito.

2.2.3 Termine diretto

Consideriamo il termine diretto dell'espressione (2.21). Calcoliamo separatamente gli elementi di matrice del potenziale, ignorando per adesso le costanti moltiplicative. Con la notazione per i momenti introdotta nel paragrafo precedente, scriviamo

$$V_{mnkl} \equiv \langle m \ n | e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}} | k \ l \rangle. \quad (2.30)$$

Come abbiamo già discusso, per la conservazione del momento possiamo scrivere $\mathbf{m} = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ e $\mathbf{n} = \mathbf{l} - \mathbf{q}$, in modo che

$$\begin{aligned} V_q &= \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_1 \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_2 \frac{e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i(\mathbf{l}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Eseguiamo un cambio di coordinate per $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_2$ con le seguenti trasformazioni:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (2.32)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}. \quad (2.33)$$

Il passaggio al sistema di riferimento del centro di massa è caratterizzato dalla proprietà $|\det(\mathbf{J})| = 1$, dove con $\mathbf{J}$ viene indicato lo Jacobiano della trasformazione. Questo risulta conveniente in virtù della simmetria sferica del potenziale, per cui

$$\begin{aligned} V_q &= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{R} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \\ &= \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{q^2\mu^2}{4}} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r} e^{-\left(\frac{\mathbf{r}}{\mu} + \frac{i\mathbf{q}\mu}{2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Attraverso la sostituzione

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{r}}{\mu} + \frac{i\mathbf{q}\mu}{2}, \quad (2.35)$$

$$d^3\mathbf{y} = \frac{d^3\mathbf{r}}{\mu^3}, \quad (2.36)$$

l'integrale nell'espressione precedente viene riscritto in un modo molto semplice, e può essere risolto in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} V_q &= \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{q^2\mu^2}{4}} \mu^3 \int_{\Omega} d^3\mathbf{y} e^{-y^2} \\ &= \frac{1}{\Omega} \mu^3 \pi^{3/2} e^{-\frac{q^2\mu^2}{4}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Possiamo ora calcolare il primo termine di (2.21), cioè la componente perturbativa all'energia nel caso diretto. Usando l'espressione del potenziale (2.37) appena ottenuta, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle V_q \rangle &= 2S^2(4 + 5m^2 - 9m) \sum_{q,k,l} \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{2}}}{\frac{\hbar^2}{2m_N}(\mathbf{k}^2 + \mathbf{l}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 - (\mathbf{l} - \mathbf{q})^2)} \\ &= -2S^2(4 + 5m^2 - 9m) \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{m_N}{\hbar^2} \sum_{\substack{q,k,l \\ |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{k} + \mathbf{q}|, |\mathbf{l} - \mathbf{q}| > k_f}} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{2}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nel secondo passaggio abbiamo reso più esplicita la sommatoria. Per le particelle di momento $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{l}$, la somma sui momenti è estesa in modulo da 0 al momento di Fermi. Il sistema è nello stato fondamentale, e i nucleoni, per questo, risiedono all'interno della sfera di Fermi. A seguito dell'interazione, il momento delle particelle coinvolte dev'essere in modulo superiore a k_f (il sistema si trova in uno stato eccitato), e le somme sono estese per valori in modulo di $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ ed $\mathbf{l} - \mathbf{q}$ maggiori del momento di Fermi.

Studiamo ora separatamente la sommatoria. Passando a somma continua grazie a (1.7), otteniamo

$$\begin{aligned} I(\mu, k_f) &= \int_{\Omega} d^3 \mathbf{q} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < k_f \\ |\mathbf{k} + \mathbf{q}| > k_f}} d^3 \mathbf{k} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{l} - \mathbf{q}| > k_f}} d^3 \mathbf{l} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{2}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})} \\ &= \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} \int_{\Omega} d^3 \mathbf{q} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < k_f \\ |\mathbf{k} + \mathbf{q}| > k_f}} d^3 \mathbf{k} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{l} - \mathbf{q}| > k_f}} d^3 \mathbf{l} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{2}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Per semplificare l'espressione, consideriamo il cambiamento di variabili

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}}{k_f} \quad \mathbf{l}' = \frac{\mathbf{l}}{k_f} \quad \mathbf{q}' = \frac{\mathbf{q}}{k_f}, \quad (2.40)$$

$$x = k_f \mu, \quad (2.41)$$

tale per cui l'espressione precedente può essere riscritta

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega} d^3 \mathbf{q} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < 1 \\ |\mathbf{k} + \mathbf{q}| > 1}} d^3 \mathbf{k} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < 1 \\ |\mathbf{l} - \mathbf{q}| > 1}} d^3 \mathbf{l} \frac{e^{-\frac{q'^2 x^2}{2}}}{\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q}' + \mathbf{k}' - \mathbf{l}')}. \quad (2.42)$$

Per la soluzione dell'integrale trovato facciamo uso del procedimento descritto da H. Euler in [17]. Il passaggio chiave risiede nella riscrittura del denominatore in termini dell'integrale di una opportuna funzione esponenziale. Si tratta dell'identità

$$\int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha x} = \frac{1}{x}, \quad (2.43)$$

vera per ogni $x > 0$. Nel nostro caso, il termine $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})$ è positivo, siccome è l'opposto di una quantità che per costruzione è negativa (la differenza tra la somma di energia di stato fondamentale e l'energia degli stati eccitati). La nostra espressione prende così la forma

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega} d^3\mathbf{q} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha q^2} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < 1 \\ |\mathbf{k} + \mathbf{q}| > 1}} d^3\mathbf{k} e^{-\alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < 1 \\ |\mathbf{l} - \mathbf{q}| > 1}} d^3\mathbf{l} e^{\alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{l}}. \quad (2.44)$$

Per risolvere i due integrali su $\mathbf{k}$ e $\mathbf{l}$ si fa uso del metodo descritto in appendice. Ponendo $y = \alpha|\mathbf{q}|$, si ottiene

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \left[\int_0^2 dq 4\pi q^2 e^{-\frac{q^2 x^2}{2}} \frac{1}{q} \int_0^{\infty} dy e^{-yq} \left(\frac{2\pi}{y^3} \left(e^{\frac{q}{2}y} sy + e^{-y}(1+y) + e^{(s-1)y}(-1-y) \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \int_2^{\infty} dq 4\pi q^2 e^{-\frac{q^2 x^2}{2}} \frac{1}{q} \int_0^{\infty} dy e^{-yq} \left(\frac{2\pi}{y^3} (e^y(y-1) + e^{-y}(y+1)) \right)^2 \right]. \quad (2.45)$$

Poniamo $u = \frac{q}{2}$ e risolviamo l'integrale sulle y . Per il risultato del calcolo il riportiamo la soluzione suggerita nell'articolo [17].

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \frac{32\pi^3}{15} \frac{1}{x^4} f_{dir}(x). \quad (2.46)$$

$$f_{dir}(x) = 2x^4 \left[\int_0^1 du u e^{-2u^2 x^2} \left(\log(1+u) \left(4 + \frac{15}{2}u - 5u^3 + \frac{3}{2}u^5 \right) + 29u^2 - 3u^4 + \right. \right. \\ \left. \left. \log(1-u) \left(4 - \frac{15}{2}u + 5u^3 - \frac{3}{2}u^5 \right) - 40u^2 \log 2 \right) + \right. \\ \left. \int_1^{\infty} du u e^{-2u^2 x^2} \left(\log(1+u) (4 - 20u^2 - 20u^3 + 4u^5) + 4u^3 + 22u + \right. \right. \\ \left. \left. \log(u-1) (-4 + 20u^2 - 20u^3 + 4u^5) + \log u (40u^3 - 8u^5) \right) \right]. \quad (2.47)$$

Dell'integrale in $f_{dir}(x)$ non abbiamo trovato soluzione analitica: lo affrontiamo quindi con tecniche numeriche. Per eseguire il conto si è implementato in linguaggio C++ la tecnica di integrazione con la formula di Simpson [18], una variante alla tradizionale formula dei trapezi in cui la funzione integranda viene sostituita con un polinomio di secondo grado, anzichè con una retta.

Per poter permettere al software di calcolo eseguire la somma, valutiamo $f_{dir}(x)$ per determinati valori del parametro x . Ricordando (2.41), e considerando valori di densità nucleari compresi tra 0 e 0.5 fm^{-3} , consideriamo valori di x compresi fra 0 e 2.8. Variando x con un passo di 0.05, otteniamo il grafico di punti in fig 2.4.

Con il metodo di integrazione Simpson, si può dimostrare che l'errore nel processo di integrazione segue la legge $e = kh^4$, dove k è una costante che dipende dalla funzione

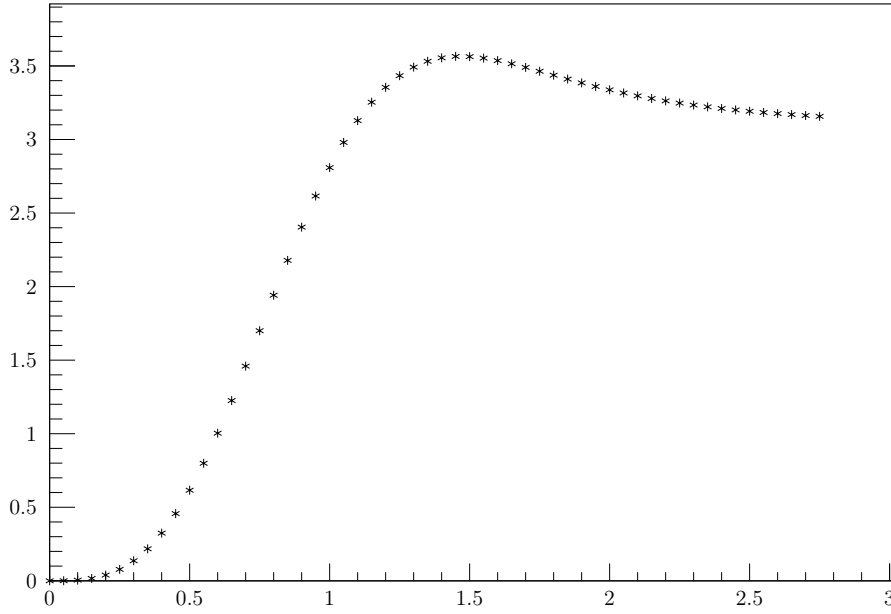


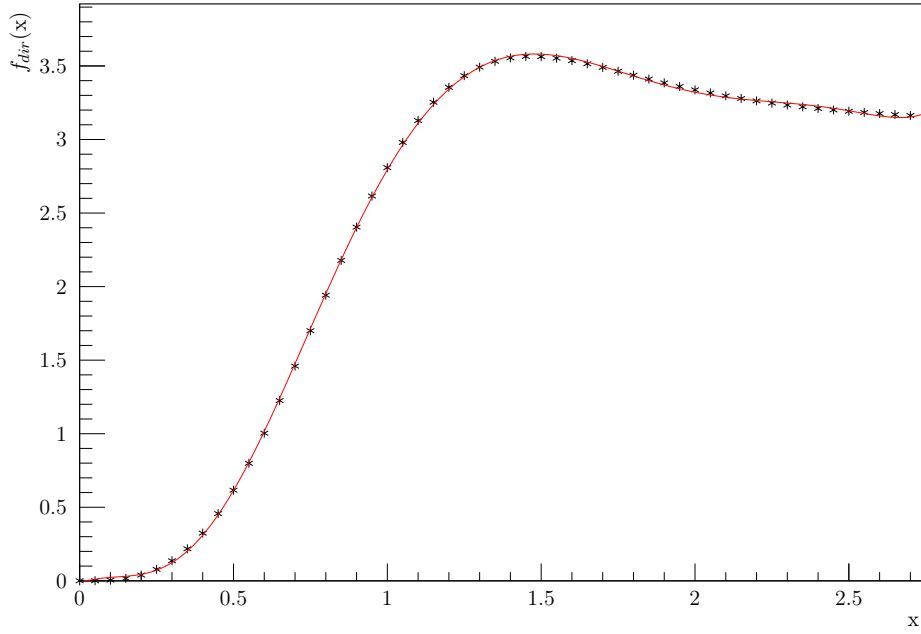
Figura 2.4: $f_{dir}(x)$ valutata per $0 < x < 1.8$ con $\delta x = 0.05$

integrande e dall'intervallo di integrazione, e h è l'ampiezza dei sottointervalli di integrazione. Da qui, grazie al metodo di dimezzamento del passo, possiamo stimare l'errore commesso nel calcolo. Nei programmi abbiamo suddiviso l'intervallo di integrazione in 1 milione di segmenti, da cui consegue che l'errore non supera mai lo 0.0001%.

Procediamo con una regressione dei punti ottenuti dalla valutazione dell'integrale al variare di x . Per far ciò, facciamo uso delle funzioni di fit contenute nelle librerie *ROOT Cern*, implementate ancora in linguaggio C++. La funzione è ottenuta con una combinazione di un polinomio di 10 grado e una gaussiana, che risulta essere la scelta migliore per approssimare i dati in quanto restituisce il più piccolo valore di χ^2 fra tutte le funzioni considerate.

$$\begin{aligned}
 f_{dir}(x) = & -6.15874 + 11.3903x + 0.617621x^2 - 3.58541x^3 + 0.0244709x^4 + 0.345463x^5 + \\
 & + 0.103764x^6 - 0.00502348x^7 - 0.0157602x^8 - 0.0049893x^9 + 0.00200924x^{10} \\
 & + 8.10397e^{-\frac{(x+0.32559)^2}{(0.617621)^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Si ricorda che l'intervallo in cui la funzione risulta valida per i nostri scopi è legata ai punti con i quali è stata ricavata. Nel nostro caso, la funzione $f_{dir}(x)$ approssima bene i nostri dati solo per $0 < x < 2.8$. In fig. 2.5 è mostrato l'andamento di $f_{dir}(x)$ sovrapposta ai punti con i quali è stato eseguito il fit. Ottenuta la desiderata espressione di (2.47)

Figura 2.5: Funzione ottenuta dal fit dei punti di $f_{dir}(x)$

in funzione di x , reintroduciamo (2.46) nell'espressione (2.38) dell'energia da cui siamo partiti

$$\langle V_q \rangle = -2S^2(4 + 5m^2 - 9m) \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{m_N}{\hbar^2} \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \frac{32\pi^3}{15} \frac{1}{x^4} f_{dir}(x). \quad (2.49)$$

Semplificando la prima espressione e ricordando la relazione tra il momento di Fermi e la densità espressa in (1.9), otteniamo

$$\begin{aligned} \langle V_q \rangle &= -S^2(4 + 5m^2 - 9m) \frac{\mu^2}{120\pi^3} \frac{m_N}{\hbar^2} \Omega k_f^3 f_{dir}(x) \\ &= -S^2(4 + 5m^2 - 9m) \frac{\mu^2 m_N}{80\pi \hbar^2} \Omega \rho f_{dir}(x). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Come ultimo passaggio, ricaviamo l'espressione dell'energia per il singolo nucleone: questo si ottiene dividendo $\langle V_q \rangle$ per il numero di nucleoni, cioè $A = \rho\Omega$. Si ha così

$$\langle v_q \rangle = -\frac{S^2(4 + 5m^2 - 9m)\mu^2 m_N}{80\pi \hbar^2} f_{dir}(x). \quad (2.51)$$

2.2.4 Termine di scambio

Consideriamo ora il termine di scambio di (2.21). Come prima, cominciamo con il calcolo degli elementi di matrice del potenziale.

$$V_{mnlk} \equiv \langle m \ n | e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}} P_M | k \ l \rangle \quad (2.52)$$

Introducendo la quantità $\mathbf{q}$ come per il caso diretto, e ricordando che nel caso di scambio il momento trasferito è $\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{l}$ (vedi fig. 2.3), abbiamo

$$\begin{aligned} V_{k+q-l} &= \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_1 \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_2 \frac{e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i(\mathbf{l}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega^2}} \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}_1} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}_2} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}} \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{l})\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Utilizzando il sistema di riferimento del centro di massa, otteniamo

$$\begin{aligned} V_{k+q-l} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\mu^2}} \\ &= \frac{1}{\Omega} \mu^3 \pi^{3/2} e^{-\frac{(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{l})^2 \mu^2}{4}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Come avevamo accennato, l'espressione degli elementi di matrice del potenziale nel caso di scambio è analoga alla rispettiva espressione per il caso diretto, a patto di prendere la giusta espressione per il momento trasferito. Procediamo con il calcolo del secondo termine di (2.21), cioè il contributo di scambio della perturbazione all'energia.

$$\begin{aligned} \langle V_{k+l-q} \rangle &= 2S^2(-1 - 10m^2 + 10m) \sum_{q,k,l} \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4} - (\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\frac{\hbar^2}{2m_N} (\mathbf{k}^2 + \mathbf{l}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 - (\mathbf{l} - \mathbf{q})^2)} \\ &= 2S^2(-1 - 10m^2 + 10m) \frac{\pi^3 \mu^6}{2\Omega^2} \frac{2m_N}{\hbar^2} \sum_{\substack{q,k,l \\ |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{k}+\mathbf{q}|, |\mathbf{l}-\mathbf{q}| > k_f}} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4} - (\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Come prima, nel secondo passaggio abbiamo scritto esplicitamente le regioni di somma per le variabili $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{l}$. Studiando separatamente la sommatoria e passando a somme continue

$$\begin{aligned} I(\mu, k_f) &= \int_{\Omega} d^3\mathbf{q} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < k_f \\ |\mathbf{k}+\mathbf{q}| > k_f}} d^3\mathbf{k} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{l}-\mathbf{q}| > k_f}} d^3\mathbf{l} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4} - (\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})} \\ &= \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} \int_{\Omega} d^3\mathbf{q} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < k_f \\ |\mathbf{k}+\mathbf{q}| > k_f}} d^3\mathbf{k} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{l}-\mathbf{q}| > k_f}} d^3\mathbf{l} \frac{e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4} - (\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Con il cambiamento di variabili di (2.40) e (2.41), otteniamo

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega} d^3 \mathbf{q} \int_{|\mathbf{k}| < 1} d^3 \mathbf{k} \int_{|\mathbf{l}| < 1} d^3 \mathbf{l} \frac{e^{-\frac{q^2 x^2}{4} - (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})^2 \frac{x^2}{4}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}. \quad (2.57)$$

Come per (2.42), siamo giunti ad un integrale il cui svolgimento viene descritto nell'articolo di H. Euler [17]. Per risolverlo, adottiamo il seguente cambio di variabili:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{l}}{2} \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{l}}{2} \quad \mathbf{r} = \mathbf{q} + \frac{\mathbf{k} - \mathbf{l}}{2}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \mathbf{l} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{a}, \quad (2.59)$$

attraverso il quale l'integrale assume la seguente forma (ci riferiamo a $|\mathbf{a}|$ ed $|\mathbf{r}|$ come a ed r):

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} 8k_f^7 \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{a} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2 + a^2)}}{r^2 - a^2} \int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3 \mathbf{b}, \quad (2.60)$$

in cui $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{r}$ sono integrate in tutto lo spazio. La condizione sulla regione di integrazione delle variabili $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{l}$ viene fornita dall'ultimo integrale, che vale 1 per $|\mathbf{k}| < 1$, $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > 1$ e $|\mathbf{l}| < 1$, $|\mathbf{l} - \mathbf{q}| > 1$, e 0 altrimenti. Si tratta di risolvere l'integrale nella variabile $\mathbf{b}$. A tal fine, usiamo il teorema dei residui. Presa ω variabile complessa e γ un cammino chiuso orientato in senso orario, vale la relazione

$$\int_{\gamma} d\omega \frac{e^{i a \omega}}{\omega} = 2\pi i, \quad (2.61)$$

per valori positivi della costante a . Tale condizione può venire equivalentemente espressa introducendo la funzione caratteristica, da cui si deduce

$$\chi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\omega \frac{e^{i a \omega}}{\omega}. \quad (2.62)$$

Utilizzando questa espressione, l'integrale in $\mathbf{b}$ assume la forma

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3 \mathbf{b} &= \int d^3 \mathbf{b} \chi((\mathbf{b} \pm \mathbf{r})^2 - 1) \chi((\mathbf{b} \pm \mathbf{a})^2 - 1) \\ &= \int d^3 \mathbf{b} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^4 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \\ &\quad e^{i\omega_1((\mathbf{b} + \mathbf{a})^2 - 1)} e^{i\omega_2((\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 - 1)} e^{i\omega_3((\mathbf{b} + \mathbf{r})^2 - 1)} e^{i\omega_4((\mathbf{b} - \mathbf{r})^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dove γ_1 e γ_2 sono presi tali da soddisfare (2.62), mentre γ_3 e γ_4 hanno orientazione opposta. Passiamo in coordinate sferiche per $\mathbf{b}$. Per poter lavorare con un'espressione

che dipende solo dal modulo delle variabili, eseguiamo subito la somma sulle coordinate angolari

$$\int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3 \mathbf{b} = \int db \, b^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, e^{i2ab \cos \theta_1 (\omega_1 - \omega_2)} e^{i2rb \cos \theta_2 (\omega_3 - \omega_4)} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^4 \\ \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} e^{i\omega_1 (b^2 + a^2 - 1)} e^{i\omega_2 (b^2 + a^2 - 1)} e^{i\omega_3 (b^2 + r^2 - 1)} e^{i\omega_4 (b^2 + r^2 - 1)}, \quad (2.64)$$

da cui si ottiene, svolgendo i conti, la seguente espressione:

$$\int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3 \mathbf{b} = \frac{\pi}{4ar} \int_{-\infty}^{\infty} db \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^4 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 (\omega_1 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} \\ e^{i\omega_1 ((b+a)^2 - 1)} e^{i\omega_2 ((b-a)^2 - 1)} e^{i\omega_3 ((b+r)^2 - 1)} e^{i\omega_4 ((b-r)^2 - 1)} + \\ - e^{i\omega_1 ((b-a)^2 - 1)} e^{i\omega_2 ((b+a)^2 - 1)} e^{i\omega_3 ((b-r)^2 - 1)} e^{i\omega_4 ((b+r)^2 - 1)}. \quad (2.65)$$

Facendo riferimento a [17], il risultato è stato trovato separatamente per 5 diverse regioni delle variabili $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{r}$. In particolare, scrivendo le regioni di validità delle soluzioni separatamente nelle variabili a e r , si ha:

	Regione di validità della soluzione	Estremi di integrazione
I	$r > a$ $r^2 + (a-1)^2 < 1$	$0 < r < 1$ $1 - \sqrt{1-r^2} < a < r$
II	$r^2 + (a-1)^2 > 1$ $r < 1, a < 1$	$0 < r < 1$ $1 - \sqrt{1-r^2} < a < 1$
III	$r > 1$ $a + r < 2$	$0 < a < 1$ $1 < r < 2 - a$
IV	$a + r > 2$ $(r-1)^2 + a^2 < 1$	$0 < a < 1$ $2 - a < r < 1 + \sqrt{1-a^2}$
V	$(r-1)^2 + a^2 > 1$ $a < 1$	$2 < r < \infty$ $0 < a < 1$ $0 < r < 2$ $1 < a < \sqrt{-r^2 + 2r}$

Le soluzioni trovate per ciascuna di queste regioni sono espresse in termini di funzioni integrali che dipendono solo dal modulo di tali coordinate. Utilizzando il software *Mathematica*, risolviamo gli integrali e diamo la soluzione analitica $I_i(a, r)$, che sarà nella

forma

$$\int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3 \mathbf{b} = -\frac{\pi}{4ar} \begin{cases} I_1(a, r) & \text{Regione I} \\ I_2(a, r) & \text{Regione II} \\ I_3(a, r) & \text{Regione III} \\ I_4(a, r) & \text{Regione IV} \\ I_5(a, r) & \text{Regione V} \end{cases} \quad (2.66)$$

Osservando ora che nella funzione integranda di (2.60) compaiono solo termini quadratici in $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{r}$ (e quindi anch'essa è funzione solo di a e r), possiamo riscrivere l'integrale in coordinate sferiche e sommare sulla parte angolare, ottenendo così l'espressione semplificata

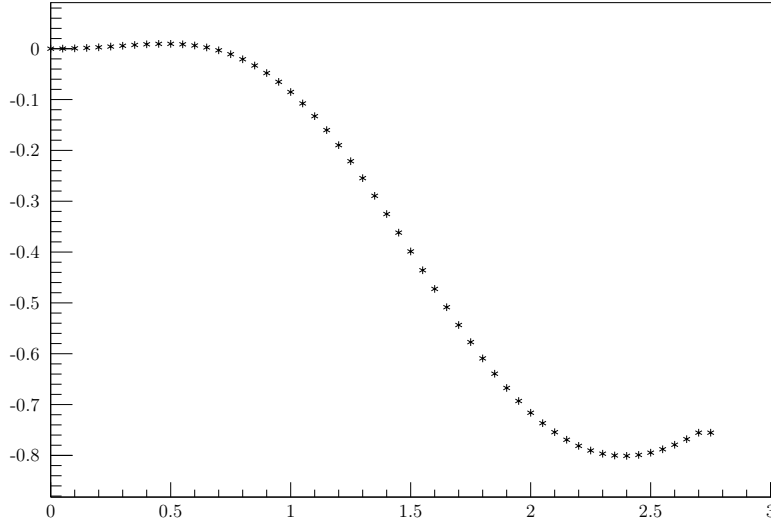
$$I(x) = \frac{\Omega^3}{4\pi^7} k_f^7 \int_0^\infty \int_0^\infty dr da r^2 a^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} \int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3 \mathbf{b}. \quad (2.67)$$

$I(x)$ prende quindi la forma

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{16\pi^6} k_f^7 \frac{1}{x^4} f_{ind}(x), \quad (2.68)$$

$$f_{ind}(x) = -x^4 \left[\int_0^1 dr \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^r da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} I_1(a, r) + \right. \\ \int_0^1 dr \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^1 da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} I_2(a, r) + \\ \int_0^1 da \int_1^{2-a} dr ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} I_3(a, r) + \\ \int_0^1 da \int_{2-a}^{1+\sqrt{1-a^2}} dr ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} I_4(a, r) + \\ \int_2^\infty dr \int_0^1 da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} I_5(a, r) + \\ \left. \int_0^2 dr \int_1^{\sqrt{-r^2+2r}} da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2 - a^2} I_5(a, r) \right], \quad (2.69)$$

dove termine x^4 è stato moltiplicato in $f_{ind}(x)$ e diviso in $I(x)$ per futura comodità. Per gli integrali presenti nell'espressione di $f(x)$ non è stata trovata una soluzione analitica. Affrontiamo quindi tali integrali con tecniche di integrazione numerica, facendo uso del metodo di integrazione Simpson implementato in linguaggio C++. Come fatto precedentemente per il caso diretto, consideriamo valori di x compresi fra 0 e 2.8, e variamo x con un passo di 0.05, ottenendo così il grafico di punti in fig. 2.6. Procediamo con una regressione dei punti ottenuti. La funzione è ottenuta con un polinomio di 6

Figura 2.6: $f_{ind}(x)$ per $0 < x < 2.8$ con $\delta x = 0.05$

grado, che risulta questa volta essere la scelta migliore per approssimare i dati (vedi fig. 2.7 per il grafico della funzione).

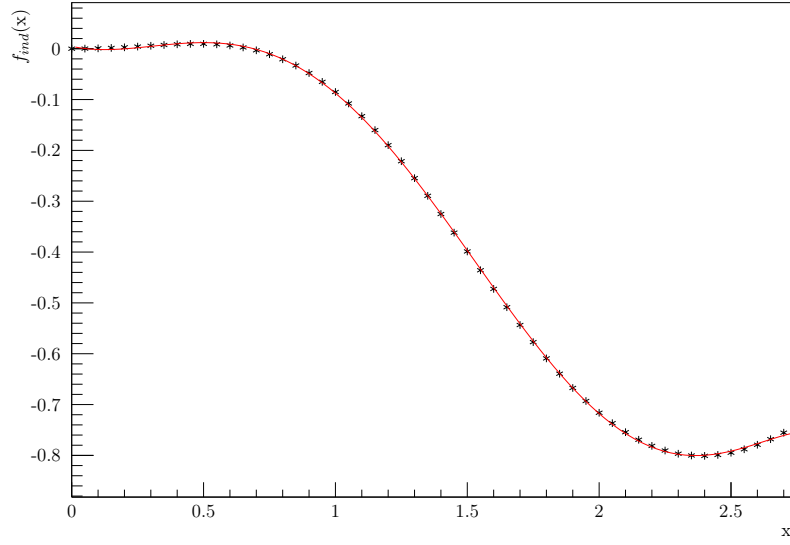
$$f_{ind}(x) = 0.00459373 - 0.110997x + 0.5668x^2 - 0.678573x^3 + 0.0506679x^4 + 0.102246x^5 - 0.0222115x^6. \quad (2.70)$$

Reintroduciamo ora (2.68) in (2.55). Scriviamo quindi i momenti in funzione della densità ρ .

$$\begin{aligned} \langle V_{k+q-l} \rangle &= 2S^2(-1 - 10m^2 + 10m) \frac{\pi^3 \mu^6}{2\Omega^2} \frac{2m_N}{\hbar^2} \frac{\Omega^3}{16\pi^6} k_f^7 \frac{1}{x^4} f_{ind}(x) \\ &= 2S^2(-1 - 10m^2 + 10m) \frac{\mu^2 m_N}{16\pi^3 \hbar^2} \Omega k_f^3 f_{ind}(x) \\ &= S^2(-1 - 10m^2 + 10m) \frac{3\mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} \Omega \rho f_{ind}(x). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ricordando $A = \rho\Omega$, l'espressione per l'energia per nucleone nel caso di scambio è

$$\langle v_{k+q-l} \rangle = \frac{3S^2(-1 - 10m^2 + 10m)\mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} f_{ind}(x). \quad (2.72)$$

Figura 2.7: Funzione ottenuta dal fit dei punti di $f_{ind}(x)$

2.2.5 Terzo termine

Passiamo al calcolo della terza somma presente in (2.21). Di questo termine, abbiamo già calcolato gli elementi di matrice del potenziale gaussiano, cioè (2.37). Non ci resta che effettuare la somma sui momenti.

$$\begin{aligned}
 \langle V_q \rangle^{(2)} &= 2S^2(5m^2 - m) \sum_{\substack{q,k,l \\ |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{k}+\mathbf{q}|, |\mathbf{l}-\mathbf{q}| > k_f}} \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{e^{-(\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\frac{\hbar^2}{2m_N} (\mathbf{k}^2 + \mathbf{l}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 - (\mathbf{l} - \mathbf{q})^2)} \\
 &= 2S^2(5m^2 - m) \frac{\pi^3 \mu^6}{2\Omega^2} \frac{2m_N}{\hbar^2} \sum_{\substack{q,k,l \\ |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| < k_f \\ |\mathbf{k}+\mathbf{q}|, |\mathbf{l}-\mathbf{q}| > k_f}} \frac{e^{-(\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Consideriamo separatamente la sommatoria. Passando a somme continue e adottando il cambio di variabili in (2.40) e (2.41), l'integrale che ne risulta è simile a (2.76), cioè

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega} d^3 \mathbf{q} \int_{\substack{|\mathbf{k}| < 1 \\ |\mathbf{k}+\mathbf{q}| > 1}} d^3 \mathbf{k} \int_{\substack{|\mathbf{l}| < 1 \\ |\mathbf{l}-\mathbf{q}| > 1}} d^3 \mathbf{l} \frac{e^{-(\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 \frac{x^2}{4}}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{l})}. \tag{2.74}$$

Per trovare il risultato, adottiamo lo stesso cambio di coordinate effettuato in (2.58), e otteniamo

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} 8k_f^7 \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{a} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r+a)^2}}{r^2 - a^2} \int_{\substack{|\mathbf{b} \pm \mathbf{r}| \geq 1 \\ |\mathbf{b} \pm \mathbf{a}| \geq 1}} d^3\mathbf{b}. \quad (2.75)$$

Osserviamo che tale espressione differisce dall'analogo del caso precedente solo nella forma dell'esponenziale. Possiamo quindi fare uso dei conti già svolti, e scrivere

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{16\pi^6} k_f^7 \frac{1}{x^4} g_{dir}(x), \quad (2.76)$$

dove $g_{dir}(x)$ è analoga ad (2.69) tranne che per l'argomento dell'esponenziale, come già visto in (2.60). Con il codice C++ già utilizzato per il calcolo di f_{ind} , risolviamo numericamente gli integrali dell'espressione, ed eseguiamo il fit dei punti ottenuti al variare del parametro x (Vedi fig 2.8). La funzione trovata che meglio approssima i dati è

$$\begin{aligned} g_{dir}(x) = & 0.132398 + 0.108804x - 0.415623x^2 + 0.0567186x^3 + 0.0459325x^4 + 0.00885137x^5 + \\ & - 0.00212052x^6 - 0.0019782x^7 - 0.000473296x^8 + 0.000242721x^9 \\ & - 0.138597e^{-\frac{(x-0.108804)^2}{(-0.415623)^2}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

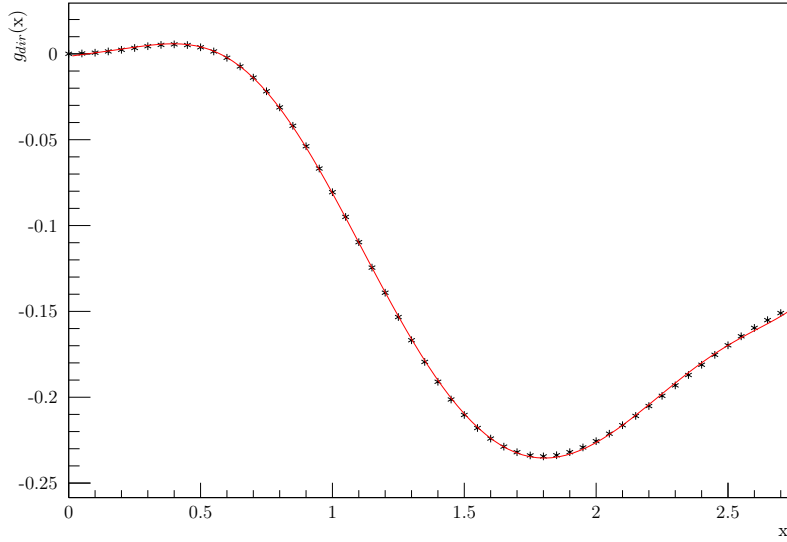


Figura 2.8: Funzione ottenuta dal fit dei punti di $g_{dir}(x)$

Possiamo ora reintrodurre (2.76) in (2.73), e, come prima, scrivere i momenti in funzione delle densità.

$$\begin{aligned}
\langle V_q \rangle^{(2)} &= 2S^2(5m^2 - m) \frac{\pi^3 \mu^6}{2\Omega^2} \frac{2m_N}{\hbar^2} \frac{\Omega^3}{16\pi^6} k_f^7 \frac{1}{x^4} g_{dir}(x) \\
&= 2S^2(5m^2 - m) \frac{\mu^2 m_N}{16\pi^3 \hbar^2} \Omega k_f^3 g_{dir}(x) \\
&= S^2(5m^2 - m) \frac{3\mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} \Omega \rho g_{dir}(x).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

In conclusione, l'energia per nucleone sarà:

$$\langle v_q \rangle^{(2)} = - \frac{3S^2(m - 5m^2)\mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} g_{dir}(x). \tag{2.79}$$

Capitolo 3

Equazione di stato e proprietà nucleari

3.1 Proprietà nucleari

Densità di saturazione. In figura (3.1) è mostrata la densità di carica radiale di alcuni nuclei ottenuta tramite esperimenti di scattering con elettroni. Per ogni nucleo considerato, la densità di carica si mantiene approssimativamente costante al centro del nucleo; per $A > 40$, il suo valore è indipendente dalla specie considerata [19], e circa pari a $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ [20]. La densità decresce da questo valore a 0 in una regione di $\approx 2 \text{ fm}$ chiamata *spessore di bordo* [21].

Il fatto che la densità nucleare non cresca all'aumentare di A implica che ciascun nucleone non interagisce con tutte le particelle che compongono il nucleo, ma solo con i suoi primi vicini. Questo comportamento è dovuto al carattere a corto raggio della forza nucleare, ed è la chiave del meccanismo di saturazione.

Per nuclei per cui possiamo considerare costante la densità, il volume è proporzionale al numero atomico. In prima approssimazione, i nuclei sono sferici, il che implica per il raggio nucleare

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad \text{con } r_0 \approx 1.2 \text{ fm}, \quad (3.1)$$

dacchè si deduce che il volume medio per nucleone è $4\pi r_0^3/3$, cioè la distanza media fra i nucleoni è dell'ordine di $\approx 2 \text{ fm}$. Per la maggior parte del tempo, quindi, i nucleoni non sentono il contributo maggiormente repulsivo dell'interazione, che è a circa 0.3 fm .

In queste condizioni, ovvero all'interno di un nucleo medio-grande con $N = Z$, si può quindi assumere uno stato di densità uniforme, che, estrapolato nel limite termodinamico, porta a pensare vi sia un minimo per l'energia di materia nucleare uniforme simmetrica.

Energia di saturazione. La formula di Bethe-Weizsäcker rappresenta un'eccellente approssimazione delle energie di legame sperimentali. Essa è frutto del modello a goccia

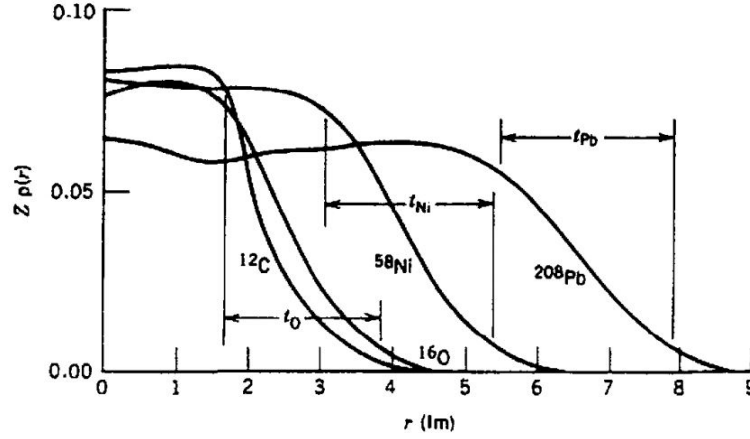


Figura 3.1: Densità radiale di carica per alcuni nuclei [21].

del nucleo, che riesce a spiegare alcune proprietà nucleari.

$$\frac{E}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{4/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A^2} + \delta(A, Z) + \dots, \quad (3.2)$$

dove a_v , a_s , a_C e a_{sym} indicano rispettivamente il coefficiente del contributo di volume, superficie, Coulomb e simmetria. Z è il numero atomico, δ è detto termine di pairing. Per materia nucleare simmetrica, dove non abbiamo contributi di superficie nè forza di Coulomb ed energia di pairing, l'energia di legame per nucleone alla densità di saturazione corrisponde ad a_v , ed è [20]

$$e(\rho_0) = -16.0 \pm 0.1 \text{ MeV}. \quad (3.3)$$

Nelle condizioni di materia nucleare simmetrica descritte sopra, la condizione di saturazione rappresenta un minimo per l'energia per nucleone come funzione della densità.

Pressione. Si definisce pressione la quantità

$$P \equiv - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_A, \quad (3.4)$$

dove E e V sono l'energia e il volume del sistema, ed il numero di particelle A è costante. Descriviamo ora il sistema in termini della densità volumica $\rho = A/V$. Per A costante si ha

$$\frac{\partial}{\partial V} = - \frac{A}{V^2} \frac{d}{d\rho}, \quad (3.5)$$

e otteniamo per la pressione la scrittura

$$P = \rho^2 \frac{de}{d\rho}, \quad (3.6)$$

Alla densità di saturazione, l'energia come funzione della densità assume un minimo, perciò

$$P(\rho_0) = \rho^2 \frac{de}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (3.7)$$

Incompressibilità. La compressibilità è definita come

$$\chi(\rho) \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

ed ha le dimensioni dell'inverso della pressione. Introducendo la densità volumica ρ e utilizzando (3.4) e (3.5), si ottiene l'espressione

$$\chi^{-1}(\rho) = 2\rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} + \rho^3 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2}. \quad (3.9)$$

Nel caso di materia nucleare infinita a temperatura nulla, risulta utile descrivere $e(\rho)$ attorno la densità di saturazione. Siccome a questo valore corrisponde un minimo di E/A , possiamo effettuare uno sviluppo in serie di Maclaurin:

$$e(\rho) = e(\rho_0) + \frac{1}{2}K_\infty \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + \frac{1}{4}Q_\infty \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^3 + \dots, \quad (3.10)$$

dove si definisce [22]

$$\begin{aligned} K_\infty &= 9\rho_0^2 \frac{d^2 e}{d\rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \\ &= \frac{9}{\rho_0} \chi^{-1}(\rho_0), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$Q_\infty = 27\rho_0^3 \frac{d^3 e}{d\rho^3} \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (3.12)$$

K_∞ viene detto coefficiente di incompressibilità nucleare ed ha le dimensioni di energia. Come si vede, è strettamente legato alla compressibilità. A meno di costanti, l'incompressibilità rappresenta la derivata seconda di $e(\rho)$: è quindi legata all'energia necessaria per allontanare il sistema dal suo valore di saturazione. Sperimentalmente, si trova [23]

$$K_\infty = 240 \pm 20 \text{ MeV}. \quad (3.13)$$

E' possibile estendere questa definizione per densità diverse da quella di saturazione. Otteniamo così l'incompressibilità dipendente dalla densità $K(\rho)$:

$$\begin{aligned} K(\rho) &= \frac{9}{\rho} \chi^{-1}(\rho) \\ &= \frac{18}{\rho} P(\rho) + 9\rho^2 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Risonanza gigante di monopolio. Un osservabile che può essere presa in considerazione per porre dei vincoli a modelli dell'equazione di stato è la risonanza gigante di monopolio (ISGMR). L'energia necessaria per produrre questa eccitazione è legata all'incompressibilità del sistema. Per nuclei finiti, l'incompressibilità può essere calcolata con il modello di Blaizot [15], dove tale grandezza è descritta con uno sviluppo analogo a quello della formula semiempirica delle masse (tecnica del *liquid drop expansion*).

$$K_A \equiv K_{vol} + K_{surf} A^{-1/3} + K_{Coul} Z^2 A^{-4/3} + K_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} \dots \quad (3.15)$$

Il primo termine dell'espansione è il contributo di volume, e corrisponde all'incompressibilità di materia nucleare infinita K_∞ . K_{Coul} e K_{sym} sono i coefficienti relativi ai termini dell'interazione Coulombiana e di simmetria, che per materia nucleare non danno contributo. Il secondo termine riassume il contributo di superficie, ed il coefficiente K_{surf} è legato alla derivata del termine di volume valutato per densità caratteristiche dello spessore di bordo nucleare, cioè $M(\rho_c)$. Il valore di ρ_c è fissato da considerazioni indipendenti dal modello utilizzato, ed è pari a circa $\rho_c \approx 0.11 \text{ fm}^{-3}$ [24]. Si ha

$$\begin{aligned} M(\rho_c) &= 3\rho_c \left. \frac{\partial K}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_c} \\ &= 27\rho_c \left(2 \left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_c} + 4\rho_c \left. \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_c} + \rho_c^2 \left. \frac{\partial^3 e}{\partial \rho^3} \right|_{\rho=\rho_c} \right) \\ &= \frac{54}{\rho_c} P(\rho_c) + 12K(\rho_c) + Q(\rho_c), \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove abbiamo utilizzato la definizione di Q di (3.12). Secondo il modello di Blaizot, esiste una relazione tra K_A e l'energia di risonanza di monopolio, cioè

$$E_{ISGMR} = \sqrt{\frac{\hbar^2 K_A}{M \langle r^2 \rangle}}, \quad (3.17)$$

dacchè si deduce l'esistenza di una relazione tra $M(\rho_c)$ e l'energia di risonanza di monopolio ¹. Attraverso misurazioni di ISGMR e previsioni teoriche di M si giunge così ad una stima di $M(\rho_c)$ [24]:

$$M = 1100 \pm 70 \text{ MeV}. \quad (3.18)$$

¹Per dettagli sulla relazioni che esprimono tali dipendenze si veda [22]

3.2 Equazione di stato

L'espressione dell'energia per nucleone $e(\rho)$ calcolata al secondo ordine perturbativo del potenziale a due corpi di Brink e Boeker di singola gaussiana risulta essere

$$\begin{aligned}
 e(\rho) = & \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} k_f^2 + S(4-5m) \frac{\pi^{3/2} \mu^3}{8} \rho - S(1-5m) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} g(x) + \\
 & - \frac{S^2(4+5m^2-9m)\mu^2 m_N}{80\pi\hbar^2} f_{dir}(x) + \frac{3S^2(-1-10m^2+10m)\mu^2 m_N}{16\pi\hbar^2} f_{ind}(x) + \\
 & - \frac{3S^2(m-5m^2)\mu^2 m_N}{16\pi\hbar^2} g_{dir}(x).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Utilizzando i parametri S ed m di (2.14), cioè quelli ottenuti con l'equazione di stato arrestata al primo ordine perturbativo, il nostro risultato mostra un minimo dell'energia ad una certa densità, e quindi un comportamento di saturazione.

I parametri da cui dipende il potenziale erano stati scelti, per il primo ordine perturbativo, in modo che l'equazione di stato soddisfasse alcune proprietà empiriche della materia nucleare. Nel caso attuale, con una nuova forma funzionale dell'equazione di stato, i valori di S ed m trovati precedentemente non sono più adeguati a descrivere le grandezze con le quali erano stati ottenuti. Nel prossimo paragrafo troveremo i valori delle costanti adatti per la nostra espressione.

3.2.1 Potenziale a singola gaussiana

L'obiettivo è quello di caratterizzare il potenziale a singola gaussiana di tipo Brink e Boeker, cioè determinare il valore numerico di S e m dell'espressione

$$V(r) = S(1-m)e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} + Sme^{-\frac{r^2}{\mu^2}} P_M, \tag{3.20}$$

in modo che l'equazione di stato di (3.19) verifichi due proprietà nucleari note con buona precisione:

- Energia di saturazione nucleare.
- Pressione alla densità di saturazione.

Imporre che l'equazione di stato riproduca tali proprietà significa risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} e(\rho_0) = -16 \text{ MeV} \\ P(\rho_0) = 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

e cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} k_{f_0}^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi^{3/2}}{4} S \mu^3 (4 - 5m) \rho_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} S (5m - 1) g(x_0) + \\ - \frac{S^2 (4 + 5m^2 - 9m) \mu^2 m_N}{80\pi \hbar^2} f_{dir}(x) + \frac{3S^2 (-1 - 10m^2 + 10m) \mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} f_{ind}(x) + \\ - \frac{3S^2 (m - 5m^2) \mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} g_{dir}(x) = -16. \\ \\ \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} k_{f_0}^2 \rho_0 + \frac{1}{2} \frac{\pi^{3/2}}{4} S \mu^3 (4 - 5m) \rho_0^2 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} S (5m - 1) \frac{d}{d\rho} g(x) \Big|_{x=x_0} \rho_0^2 + \\ - \frac{S^2 (4 + 5m^2 - 9m) \mu^2 m_N}{80\pi \hbar^2} \frac{d}{d\rho} f_{dir}(x) \Big|_{x=x_0} \rho_0^2 + \frac{3S^2 (-1 - 10m^2 + 10m) \mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} \frac{d}{d\rho} f_{ind}(x) \Big|_{x=x_0} \rho_0^2 + \\ - \frac{3S^2 (m - 5m^2) \mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} \frac{d}{d\rho} g_{dir}(x) \Big|_{x=x_0} \rho_0^2 = 0. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Il sistema è risolubile univocamente in S e m in presenza del valore del range dell'interazione. Quindi, troviamo la soluzione del sistema facendo variare il range per valori fisicamente accettabili, cioè considerando $0.6 \text{ fm} < \mu < 1.5 \text{ fm}$. Il sistema di equazioni è stato risolto con metodi numerici, implementando con C++ il metodo Broyden, una versione del metodo di Newton per la risoluzione di sistemi non lineari. Il risultato è riportato in tabella.

μ (fm)	m	S (MeV)
0.6	1.78114	-496.535
0.7	1.44761	-437.305
0.8	1.27106	-351.177
0.9	1.15071	-274.562
1	1.06	-214.986
1.1	0.989032	-170.823
1.2	0.933068	-138.433
1.3	0.889207	-114.54
1.4	0.855311	-96.7064
1.5	0.829651	-83.221

In figura 3.2 mostriamo la dipendenza della equazione di stato con la densità nucleare. Abbiamo considerato diversi valori di range dell'interazione, compresi fra 0.7 fm e 1.1 fm, ed usato i rispettivi parametri del potenziale (presenti in tabella). Il nostro modello riesce a riprodurre un comportamento di saturazione con tutti i valori di μ presi in considerazione.

Risulta ora interessante valutare le predizioni del il nostro modello per l'incompressibilità nucleare. Per il calcolo di questa grandezza è stato necessario lo sviluppo della derivata di secondo ordine di tutti i termini dell'equazione di stato, di cui omettiamo il conto e il risultato. Come sappiamo, tale quantità si attesta sperimentalmente intorno a 240 MeV.

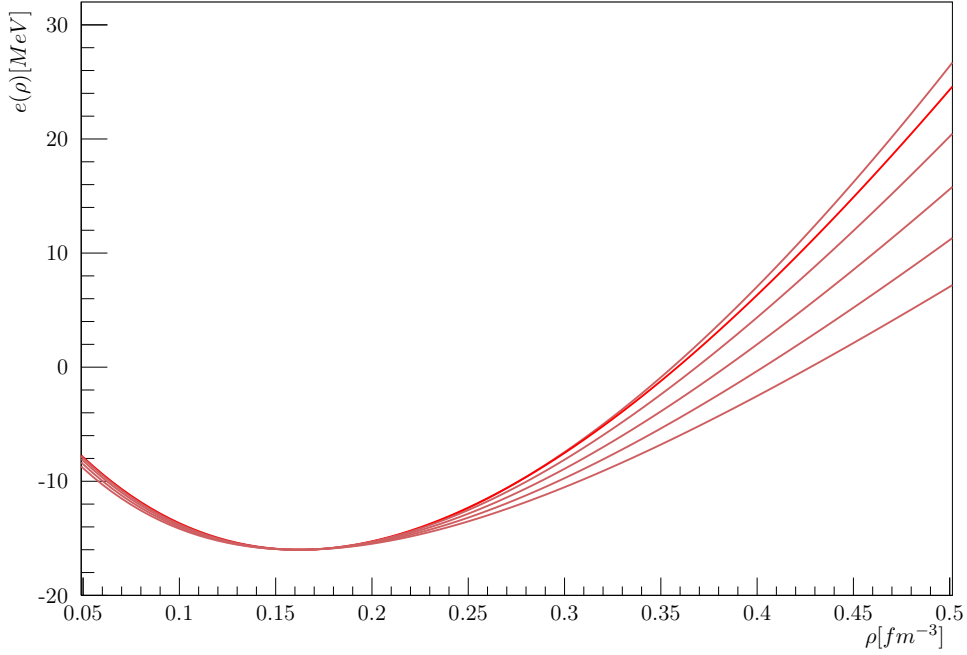


Figura 3.2: Equazione di stato al variare della densità per diversi valori di μ . In rosso acceso è evidenziata la curva con $\mu = 0.8$. Al crescere del range, l'EoS assume un andamento sempre più rilassato.

In figura 3.3 è mostrato l'andamento dell'incompressibilità al variare del range nucleare calcolato con il nostro modello, messa a confronto con la curva dell'incompressibilità ottenuta con l'EoS sviluppata al primo ordine perturbativo.

Come si osserva, per entrambi i modelli e con valori di range superiori a 0.9 fm la quantità in esame ha un andamento lineare decrescente. Il comportamento della funzione può essere spiegato osservando che per piccoli valori di range la gaussiana dell'interazione assume un comportamento più piccato all'origine. Ricordando che l'incompressibilità è una grandezza proporzionale alla quantità di energia necessaria per modificare la densità del sistema dal punto di saturazione, risulta intuibile che per range grandi (gaussiana appiattita) piccole variazioni di densità corrispondono a piccole variazioni di energia.

L'incompressibilità ottenuta con l'EoS arrestata al primo ordine perturbativo mostra un andamento circa lineare anche a range inferiori di 0.9 fm. Con il nostro modello, invece, l'incompressibilità raggiunge un valore massimo attorno a 250 MeV per 0.8 fm, quindi mostra la tendenza a decrescere mano a mano che il range diminuisce.

L'andamento singolare dell'incompressibilità si riflette sul comportamento dell'equazione di stato al variare del range, come si è visto in figura 3.2. La curva risulta con massima concavità quando l'incompressibilità è alta (cioè per valori attorno a 0.8 fm),

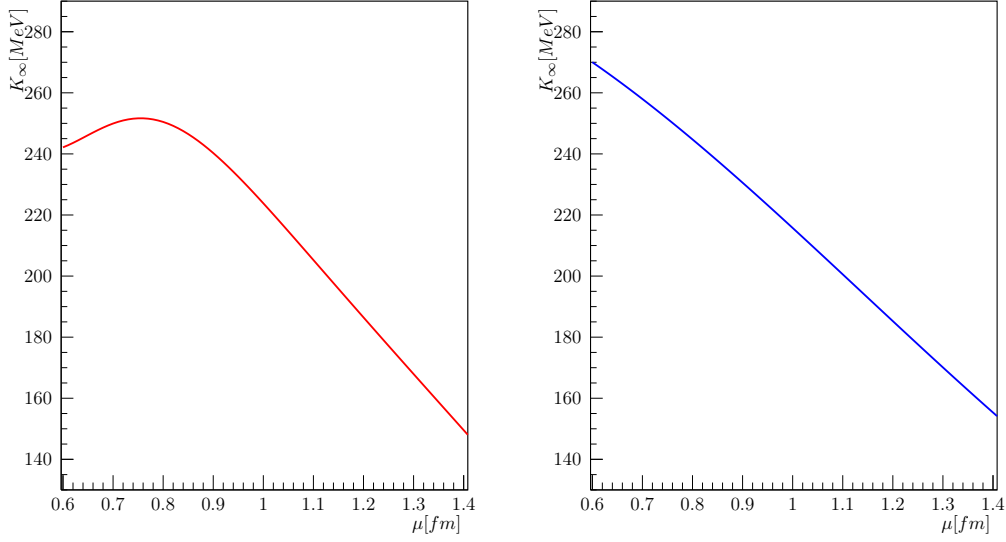


Figura 3.3: K_∞ calcolato con il nostro modello (curva rossa) e calcolato a partire dall'equazione di stato arrestata al primo ordine (curva blu).

mentre prende un andamento più disteso per range diversi.²

Procediamo con il calcolo di $M(\rho_c)$, come definito in (3.16). Anche in questo caso omettiamo la sua espressione, ottenuta derivando l'equazione di stato. Per questa quantità, il valore atteso tramite misurazioni di ISGMR risulta essere 1100 MeV. Riportiamo di seguito l'andamento dei valori di K_∞ e $M(\rho_c)$ ottenuti con il nostro modello al variare del range nucleare.

μ (fm)	K_∞ (MeV)	$M(\rho_c)$ (MeV)
0.6	242.145	1134.51
0.7	249.947	1187.89
0.8	250.473	1210.92
0.9	240.283	1175.36
1	223.828	1100.78
1.1	205.256	1010.95
1.2	186.468	918.628
1.3	167.927	827.53
1.4	149.55	737.1
1.5	131.177	645.519

Come osserviamo, il nostro modello riproduce i valori attesi con un ragionevole margine d'errore per valori di range compresi tra 0.7 e 1 fm. In conclusione, i parametri S ed m

²Per densità prossime alla densità di saturazione.

che caratterizzano l'interazione scelti per energia e pressione alla densità di saturazione fissano una volta per tutte il comportamento del nostro modello, che risulta aperto ad un confronto con le proprietà empiriche della materia nucleare.

3.2.2 Perturbazione al secondo ordine

Decidiamo di valutare separatamente l'andamento al variare della densità del termine del secondo ordine perturbativo dell'equazione di stato, cioè

$$e(\rho)_{II} = -\frac{S^2(4 + 5m^2 - 9m)\mu^2 m_N}{80\pi\hbar^2} f_{dir}(x) + \frac{3S^2(-1 - 10m^2 + 10m)\mu^2 m_N}{16\pi\hbar^2} f_{ind}(x) + \\ - \frac{3S^2(m - 5m^2)\mu^2 m_N}{16\pi\hbar^2} g_{dir}(x). \quad (3.23)$$

L'espressione è valida per valori di x compresi tra 0 e 2.8, che per un range dell'interazione NN dell'ordine del fermi permette la descrizione della maggior parte dei sistemi nucleari esistenti in natura. In figura 3.4 è riportata la variazione di $e(\rho)_{II}$ rispetto alla densità, ottenuta utilizzando i seguenti parametri:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.8 \text{ fm} \\ S &= -351.177 \text{ MeV} \\ m &= 1.27106. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nella figura è evidenziato in blu l'andamento del termine del primo ordine, riportato usando gli stessi parametri del secondo ordine (in modo che la somma delle due funzioni rappresenti proprio l'equazione di stato).

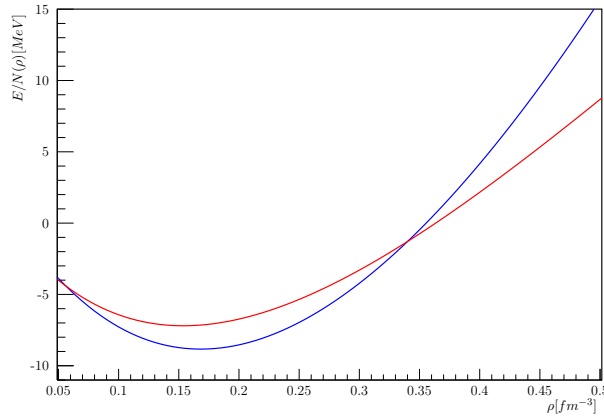


Figura 3.4: Confronto fra $e(\rho)_{II}$ (in rosso) e $e(\rho)_I$ (in blu).

Come si può vedere, $e(\rho)_{II}$ si comporta al variare della densità allo stesso modo di $e(\rho)_I$. Per prima cosa, notiamo un minimo dell'energia in corrispondenza di un valore di

densità vicino a quello di saturazione. Per densità maggiori la tendenza è quasi lineare, mentre per densità più piccole, il comportamento è assimilabile a quello del termine di energia del primo ordine. Come possiamo osservare, inoltre, il contributo del secondo ordine all'equazione di stato in termini di energia è molto rilevante: la differenza di energia rispetto al primo ordine è di pochi MeV. Questo mette in luce il carattere non perturbativo del modello.

Con i parametri presi in considerazione, notiamo che è il termine di scambio a dare un contributo repulsivo. I due termini diretti sono invece attrattivi, e contribuiscono a basse densità a scavare la buca di potenziale.

3.2.3 Correlazioni di secondo ordine

Lo sviluppo dell'equazione di stato al secondo ordine perturbativo introduce correlazioni che non vengono considerate al livello di approssimazione HF. Come abbiamo visto, ad esempio, l'andamento dell'incompressibilità al variare del range ottenuto con il nostro modello è significativamente diverso da quello relativo all'EoS arrestata al primo ordine perturbativo. Ci proponiamo ora di evidenziare eventuali differenze con l'EoS in approssimazione HF per alcune osservabili ricavabili dall'equazione di stato.

I parametri che caratterizzano entrambi i modelli sono stati scelti fissando l'energia e la pressione alla densità di saturazione: per mettere in luce gli effetti di correlazione sull'equazione di stato è necessario che essa sia valutata a densità diverse di ρ_0 . Analogamente, decidiamo di indagare il comportamento della pressione e dell'incompressibilità (3.14) come funzione della densità. I risultati sono mostrati in figura 3.5 e 3.6 per tre valori di range ($\mu = 0.7, 0.9, 1.2$ fm). Indichiamo in blu le grandezze relative all'EoS arrestata al primo ordine, in rosso le grandezze ottenute con il nostro modello.

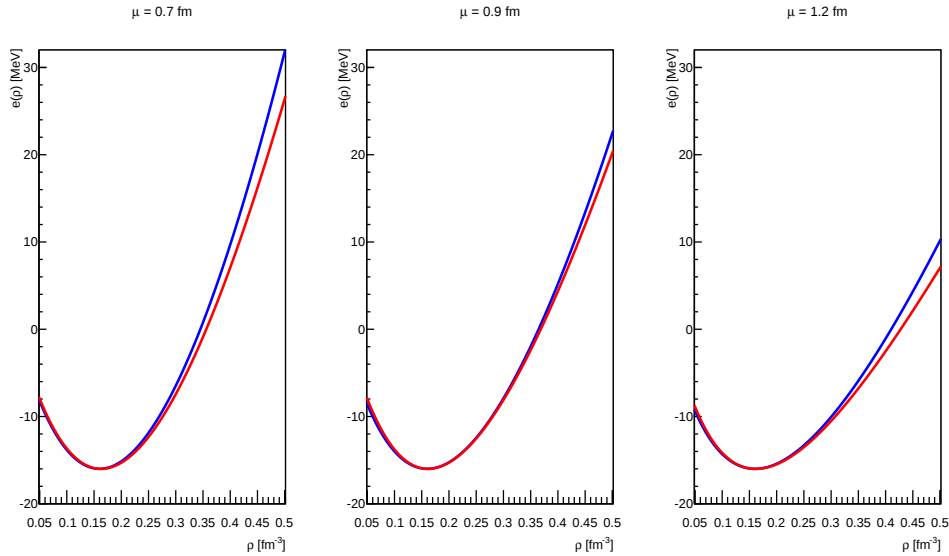


Figura 3.5: Equazione di stato.

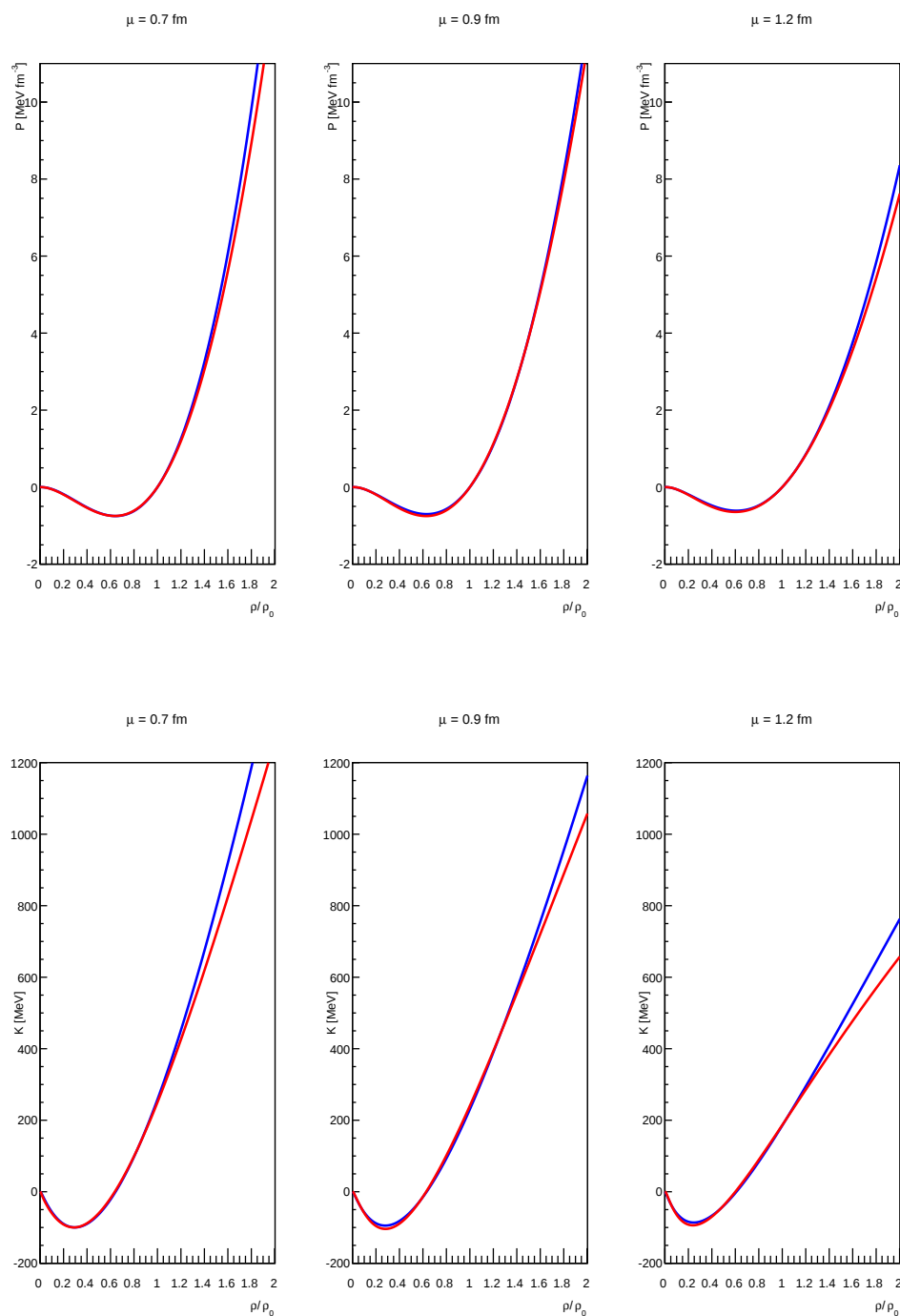


Figura 3.6: Pressione (in alto) e incompressibilità (in basso) in funzione della densità nucleare.

Come si osserva, per i valori di range considerati l'equazione di stato vicino alla densità di saturazione non varia apprezzabilmente fra i due modelli. I parametri da cui dipende il

potenziale, infatti, sono stati scelti in modo da riprodurre l'energia di saturazione alla densità p_0 . Gli effetti di correlazione sono quindi evidenti solo nella rinormalizzazione effettuata nei parametri che caratterizzano il potenziale. Anche densità diverse da p_0 , l'energia per nucleone ricavata con il nostro modello si discosta dell'equazione di stato in approssimazione HF per piccole variazioni, dell'ordine del MeV.

Il comportamento di pressione e incompressibilità non differisce in modo eclatante fra i due modelli. Per densità vicine a quella di saturazione, le due curve ottenute con il nostro modello risultano simili a quelle ottenute con il modello HF. In realtà, la scala dei grafici impedisce un'attenta valutazione dei valori ottenuti alla saturazione. Ad esempio, per $\mu = 0.7$ fm, $K_\infty \approx 250$ MeV per l'EoS al secondo ordine, mentre $K_\infty \approx 260$ MeV per l'EoS al primo ordine.

Gli effetti introdotti dal termine di secondo ordine dell'energia sono particolarmente evidenti negli andamenti di incompressibilità per densità superiori a $\approx 1.2\rho_0$. Per tutti i valori di range considerati, il nostro modello mostra una crescita meno rapida al variare della densità di quanto si ha con il modello in approssimazione HF.

3.3 Materia neutronica

La materia neutronica è materia nucleare composta da soli neutroni. L'interesse per questo genere di sistemi nasce dallo studio di nuclei ricchi di neutroni e dalle proprietà delle stelle di neutroni.

L'equazione di stato per materia neutronica può essere ottenuta adottando qualche modifica ai calcoli eseguiti nelle sezioni precedenti. In primo luogo, non abbiamo più degenerazione dovuta all'isospin: in (2.1), (2.7) e (2.18) le somme sull'isospin danno sempre un contributo unitario. Per lo stesso motivo, il momento di fermi è legato alla densità secondo la relazione

$$k_f^3 = 3\pi^2\rho, \quad (3.25)$$

cioè a meno di un fattore 1/2 rispetto alla relazione per materia simmetrica (1.9). L'equazione di stato per materia neutronica risulta quindi essere

$$\begin{aligned} e_n(\rho) = & \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} k_f^2 + S(2 - 3m) \frac{\pi^{3/2} \mu^3}{8} \rho - S(1 - 3m) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} g(x) + \\ & - \frac{S^2(2 + 3m^2 - 5m) \mu^2 m_N}{80\pi \hbar^2} f_{dir}(x) + \frac{3S^2(-1 - 6m^2 + 6m) \mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} f_{ind}(x) + \\ & - \frac{3S^2(m - 3m^2) \mu^2 m_N}{16\pi \hbar^2} g_{dir}(x), \end{aligned} \quad (3.26)$$

ed il suo andamento è mostrato in fig. 3.7 per vari valori di range. Per il grafico, sono stati usati i parametri ottenuti per l'EoS di materia nucleare simmetrica in tabella 3.2.1. Qualitativamente, il comportamento della funzione rassomiglia quello ottenuto a partire da altri modelli, vedi [25].

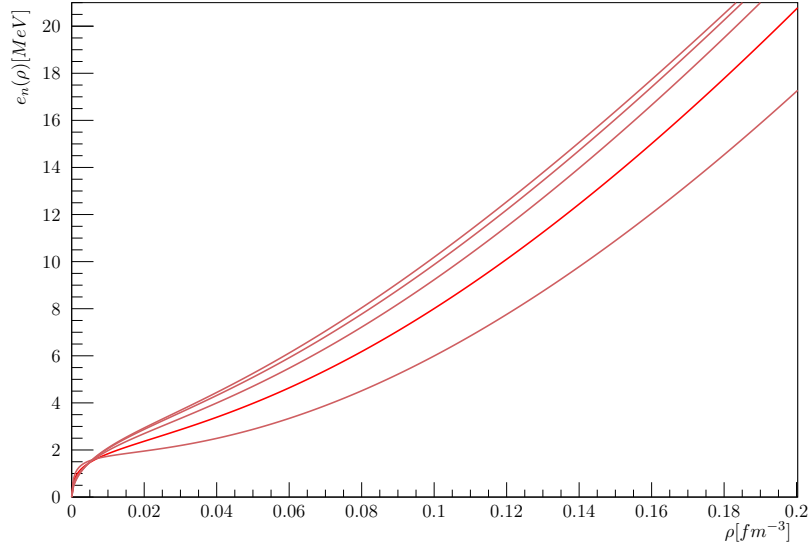


Figura 3.7: Equazione di stato per materia neutronica. Sono stati considerati range compresi tra $\mu = 0.7$ e $\mu = 1.1$ fm. La curva in rosso acceso corrisponde a $\mu = 0.8$ fm. A fissata densità, l'energia aumenta al crescere del range.

Per un'analisi più attenta del risultato decidiamo di calcolare per il nostro sistema il valore dell'energia di simmetria $S(\rho)$. L'equazione di stato per materia nucleare asimmetrica è una funzione della densità e del termine di asimmetria di isospin δ , definito come

$$\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}, \quad (3.27)$$

dove $\rho = \rho_n + \rho_p$, cioè la densità totale del sistema. δ rappresenta cioè la frazione di neutroni sul numero totale di nucleoni: per materia neutronica il suo valore è 1, per materia simmetrica 0. L'EoS di materia nucleare asimmetrica $e_a(\rho, \delta)$ può essere sviluppata al secondo ordine attorno a $\delta = 0$

$$e_a(\rho, \delta) = e_a(\rho, 0) + S(\rho)\delta^2 + o(\delta^4), \quad (3.28)$$

dove con $e_a(\rho, 0)$ indichiamo l'usuale EoS per materia nucleare simmetrica. I termini dello sviluppo di ordine dispari sono nulli perchè l'interazione nucleare deve essere simmetrica in isospin.

La quantità $S(\rho) \equiv \partial^2 e_a / \partial \delta^2$ è chiamata energia di simmetria. Calcoli teorici eseguiti secondo diversi modelli mostrano che il contributo del coefficiente del termine del quarto ordine alla densità di saturazione è dell'ordine del MeV. Nei nostri conti trascureremo questo contributo. Per materia neutronica, possiamo perciò scrivere

$$\begin{aligned} S(\rho) &= e_a(\rho, 1) - e_a(\rho, 0) \\ &= e_n(\rho) - e(\rho). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Il grafico dell'energia di simmetria in funzione della densità è riportato in fig. 3.8 per $\mu = 0.8$ fm. Alla densità di saturazione e per tale valore di range, il valore di $S(\rho)$ ottenuto con il nostro modello è 31.01 MeV, in perfetto accordo con i dati sperimentali [26].

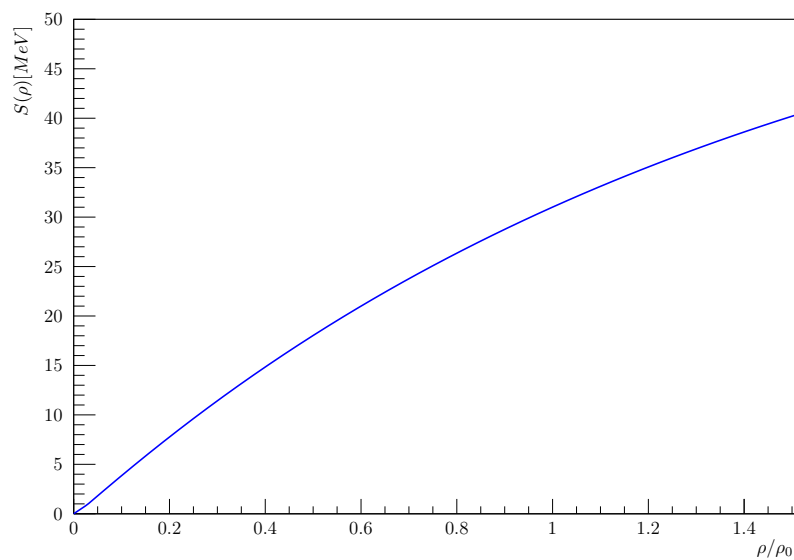


Figura 3.8: Energia di simmetria.

Capitolo 4

Conclusioni

Nel corso degli anni, i modelli SCMF hanno acquisito un buon grado di affidabilità nella descrizione di alcune proprietà fondamentali del nucleo. Attraverso il metodo HF, queste teorie riescono a derivare un campo medio nucleare in maniera microscopica, cioè per mezzo di un'Hamiltoniana composta da un termine cinetico ed un potenziale a due corpi. Nonostante il successo di tali modelli, esistono ancora delle difficoltà nella determinazione di alcune proprietà di singola particella (ad esempio, le energie di eccitazione o la massa efficace).

In [12] è stata determinata l'equazione di stato per materia nucleare simmetrica con l'interazione Brink e Boeker a livello di approssimazione HF. L'espressione ottenuta riesce a riprodurre il comportamento di saturazione dell'equazione di stato per diversi range dell'interazione, ed il valore di alcune proprietà empiriche della materia con buona precisione, come, ad esempio, l'incompressibilità nucleare.

Nel presente lavoro abbiamo elaborato un modello che include nell'equazione di stato gli effetti di correlazione introdotti dalle correzioni perturbative del secondo ordine dell'energia per nucleone per il potenziale Brink e Boeker. L'obiettivo è quello di determinare l'entità e la natura di queste correzioni, e il loro effetto sulle osservabili.

Nel capitolo 1 di questa tesi abbiamo presentato il fondamento teorico della nostra discussione. Dopo un'introduzione sul modello di particella indipendente nel caso di materia nucleare, abbiamo discusso la teoria perturbativa ed il metodo HF. Il capitolo 2 contiene il calcolo dei primi due termini della serie perturbativa dell'energia. Ci siamo limitati a considerare l'interazione di Brink e Boeker a singola gaussiana. Fin dove è stato possibile, abbiamo risolto gli integrali analiticamente; laddove non è stato possibile, abbiamo implementato un metodo numerico con C++. Infine, nel capitolo 3 abbiamo presentato l'equazione di stato ricavata con il nostro modello, evidenziandone il contributo del secondo ordine. Riportiamo i risultati ottenuti da questo studio:

- Al secondo ordine dello sviluppo perturbativo del potenziale, l'equazione di stato ottenuta riproduce correttamente il comportamento di saturazione per valori realistici di range dell'interazione nucleare, evidenziando il minimo al valore di densità e di energia note.

- I valori determinati empiricamente di K_∞ e $M(\rho_c)$ sono riprodotti con buona accuratezza per valori di range $0.6 < \mu < 1.2$ fm.
- Il contributo del secondo ordine perturbativo dell'energia per nucleone è composto da due termini relativi all'interazione diretta ed un termine associato all'interazione di scambio. I primi due termini sono sempre negativi, ed hanno l'effetto, a basse densità, di diminuire l'energia del sistema; il termine dell'interazione di scambio domina a densità più alte. L'andamento del termine di energia del secondo ordine è molto simile a quello del primo ordine.

Al fine di presentare un confronto diretto fra le EoS ottenute con diversi livelli di approssimazione, abbiamo messo a confronto le curve di equazione di stato, pressione e incompressibilità dei due modelli. Inoltre, abbiamo effettuato un test del nostro modello con materia neutronica. Abbiamo così evidenziato quanto segue:

- Gli andamenti dell'equazione di stato in funzione della densità arrestata al primo ed al secondo ordine perturbativo per vari valori di range non sono molto diversi. Gli effetti di correlazione risultano evidenti nella rinormalizzazione dei parametri che caratterizzano il potenziale. Per le curve di pressione e incompressibilità, invece, il nostro modello mostra differenze più sensibili; per queste grandezze, ad esempio, si riscontrano andamenti meno rapidi al variare della densità.
- La curva dell'incompressibilità al variare del range assume un andamento diverso da quella calcolata con il modello in approssimazione HF: per range inferiori a $\mu \approx 0.7$ fm la curva decresce, evidenziando un massimo attorno a 0.8 fm. Per il calcolo dell'incompressibilità il nostro modello si discosta dall'approssimazione precedente per range piccoli.
- L'equazione di stato per materia neutronica e l'energia di simmetria calcolate con il nostro modello risultano riprodotte nell'andamento atteso. Alla densità di saturazione e per $\mu = 0.8$ fm, il valore dell'energia di simmetria è in perfetto accordo con il risultato sperimentale.

Sviluppi futuri del modello includono:

- L'uso di un potenziale Brink e Boeker a due gaussiane.
- Eliminazione dell'approssimazione sulla massa efficace introdotta nella sezione 2.2.1, cioè il calcolo degli integrali con $m^*(k)$.

Appendice A

Calcolo di integrale

In questa sezione mostriamo come sono stati calcolati gli integrali su $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{l}$ di (2.44). La procedura di svolgimento è descritta per una funzione integranda generica $f(\mathbf{q}, \mathbf{k})$. Solo alla fine sostituiamo l'espressione che interessa i nostri calcoli.

$$I(q) = \int_{\substack{|\mathbf{k}| < 1 \\ |\mathbf{k} + \mathbf{q}| > 1}} d^3\mathbf{k} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \quad (\text{A.1})$$

Per $|\mathbf{q}| > 2$ la condizione $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > 1$ sul dominio di integrazione viene automaticamente soddisfatta per ogni $\mathbf{k}$ dell'insieme selezionato con la prima condizione. Per $|\mathbf{q}| < 2$ è necessario uno studio più approfondito.

$$|\mathbf{q}| < 2$$

Conviene introdurre l'espressione seguente:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}, \beta) &= \int_{\substack{|\mathbf{k}| < 1 \\ |\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}| > 1}} d^3\mathbf{k} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \\ &= \int_{|\mathbf{k}| < 1} d^3\mathbf{k} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \theta(|\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}| - 1), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dJ(\mathbf{q}, \beta)}{d\beta} = \int_{|\mathbf{k}| < 1} d^3\mathbf{k} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta(|\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}| - 1) \frac{\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}}{|\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}|} \cdot \mathbf{q}, \quad (\text{A.3})$$

tramite la quale, per i soli $|\mathbf{q}| < 2$, vale:

$$I(q) = J(\mathbf{q}, 1) = \int_0^1 d\beta \int_{|\mathbf{k}| < 1} d^3\mathbf{k} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta(|\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}| - 1) \frac{\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}}{|\mathbf{k} + \beta\mathbf{q}|} \cdot \mathbf{q} \quad (\text{A.4})$$

Consideriamo ora le trasformazioni (che avvengono a fissato $\mathbf{q}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{k} + \beta\mathbf{q} \\ d^3\mathbf{k} &= d^3\mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}
 I(q) &= \int_0^1 d\beta \int d\Omega_n n^2 dn f(\mathbf{q}, \mathbf{n} - \beta \mathbf{q}) \delta(|\mathbf{n}| - 1) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{q} \theta(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \frac{q^2 \beta}{2}) \\
 &= \int_0^1 d\beta \int_{\Omega_n} d\Omega_n \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} f(\mathbf{q}, \mathbf{n} - \beta \mathbf{q}) \theta(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \frac{q^2 \beta}{2}).
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

$|\mathbf{n}|$ è fissato a 1 dalla delta di dirac. La funzione caratteristica θ viene introdotta per soddisfare la condizione sul dominio di integrazione di $\mathbf{k}$. Infatti, si ha che

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{k}| &= \sqrt{k^2} = \sqrt{(\mathbf{n} - \beta \mathbf{q})^2} = \sqrt{1 + \beta^2 q^2 - 2\beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}} < 1 \\
 1 + \beta^2 q^2 - 2\beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &< 1 \\
 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \frac{\beta q^2}{2} &> 0.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Scelgiamo un sistema di coordinate sferiche per risolvere l'integrale

$$I(q) = \int_0^1 d\beta \int_{\Omega_n} \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} f(\mathbf{q}, \mathbf{n} - \beta \mathbf{q}) \theta(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \frac{q^2 \beta}{2}), \tag{A.8}$$

e imponiamo il cambio di coordinate

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{q}|} = \frac{|\mathbf{n}| |\mathbf{q}| \cos \theta}{|\mathbf{q}|} = \cos \theta \\
 dx &= -\sin \theta d\theta,
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Per cui otteniamo:

$$\begin{aligned}
 I(q) &= \int_0^1 d\beta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 dx x |\mathbf{q}| f(\mathbf{q}, \mathbf{n} - \beta \mathbf{q}) \theta(x |\mathbf{q}| - \frac{\beta q^2}{2}) \\
 &= |\mathbf{q}| \int_0^1 d\beta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{\beta |\mathbf{q}|}{2}}^1 dx x f(\mathbf{q}, \mathbf{n} - \beta \mathbf{q}).
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Specializziamoci ora al nostro caso, con l'introduzione della funzione integranda presente in (2.44). Si avrà

$$\begin{aligned}
 I(q) &= 2\pi |\mathbf{q}| \int_0^1 d\beta \int_{\frac{\beta |\mathbf{q}|}{2}}^1 dx x e^{-\alpha(x |\mathbf{q}| - \beta q^2)} \\
 &= 2\pi |\mathbf{q}| \int_0^1 d\beta e^{\alpha \beta q^2} \int_{\frac{\beta |\mathbf{q}|}{2}}^1 dx x e^{-\alpha x |\mathbf{q}|} \\
 &= 2\pi |\mathbf{q}| \int_0^1 d\beta e^{y \beta |\mathbf{q}|} \int_{\frac{\beta |\mathbf{q}|}{2}}^1 dx x e^{-y x},
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della sostituzione $y = \alpha |\mathbf{q}|$. L'integrale in x è risolvibile con la formula di integrazione per parti, e ne diamo subito il risultato; si tratta

di risolvere l'integrale in β (scriviamo q a luogo di $|\mathbf{q}|$).

$$\begin{aligned} I(q) &= \frac{2\pi q}{y^2} \int_0^1 d\beta e^{y\beta q} \left(e^{-y}(-1-y) + e^{-\beta \frac{yq}{2}} \left(\beta \frac{yq}{2} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{2\pi q}{y^2} \left(e^{-y}(-1-y) \frac{e^{yq} - 1}{yq} + \frac{yq}{2} \left(\frac{2e^{\frac{yq}{2}}}{yq} - \left(\frac{2}{yq} \right)^2 (e^{\frac{yq}{2}} - 1) \right) + \frac{2}{yq} (e^{\frac{yq}{2}} - 1) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

dove ancora si è fatto uso della formula di integrazione per parti. Infine, con opportune semplificazioni, si ottiene

$$I(q) = \frac{2\pi}{y^3} \left(e^{\frac{yq}{2}} qy + e^{-y}(1+y) + e^{y(q-1)}(-1-y) \right). \quad (\text{A.13})$$

$|\mathbf{q}| > 2$

Consideriamo da subito la funzione integranda di (2.44). L'integrale è della forma

$$I(q) = \int_{|\mathbf{k}| < 1} d^3\mathbf{k} e^{-\alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}. \quad (\text{A.14})$$

In virtù della simmetria sferica, si ha

$$\begin{aligned} I(q) &= \int_{|\mathbf{k}| < 1} d\theta d\phi dk \sin \theta k^2 e^{-\alpha q k \cos \theta} \\ &= 2\pi \int_0^1 dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-\alpha q k \cos \theta} \\ &= 2\pi \int_0^1 dk k \frac{1}{\alpha q} (e^{\alpha q k} - e^{-\alpha q k}) \\ &= \frac{2\pi}{\alpha q} \left(\int_0^1 dk k e^{\alpha q k} - \int_0^1 dk k e^{-\alpha q k} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Risolto tale integrale per parti, ed effettuate le dovute semplificazioni, otteniamo

$$I(q) = \frac{2\pi}{y^3} (e^y(y-1) + e^{-y}(y+1)). \quad (\text{A.16})$$

Appendice B

Diagramma di Feynman per il contributo di secondo ordine

L'utilizzo dei diagrammi di Feynman per il calcolo dei termini perturbativi all'energia del sistema permette un'interpretazione dei processi coinvolti in ogni contributo. Inoltre, ha il vantaggio di garantire una rapida ricetta per il calcolo dell' n -esimo termine dello sviluppo perturbativo. Non potendo dare una trattazione completa di questo metodo di studio, ci limitiamo a introdurre i diagrammi di Feynman relativi al termine perturbativo del secondo ordine all'energia. Per una trattazione completa di questo metodo, si rimanda a [4].

Il diagrammi di nostro interesse sono mostrati in figura B.1.¹ Tradurre questo



Figura B.1: Diagrammi per il termine perturbativo del secondo ordine all'energia. Immagini prese da [4]

diagramma in un'espressione di energia calcolabile richiede la conoscenza di alcune regole, qui brevemente riassunte:

- Ad ogni interazione (linea ondulata) è associato l'elemento di matrice del potenziale calcolato fra stati di particella iniziale (linee entranti nell'interazione) e finale (linee uscenti dall'interazione). Il numeratore è il prodotto di questi termini.

¹Ci si riferisce ai diagrammi della serie perturbativa per materia nucleare non relativistica come diagrammi di *Goldstone*, in onore del fisico britannico Jeffrey Goldstone.

- Ogni coppia di linee ondulate a tempi diversi introduce al denominatore un termine che è la differenza tra la somma delle energia relative a linee entranti e linee uscenti.
- Ciascuna linea entrante nell'interazione introduce un fattore -1.
- Un diagramma completamente simmetrico introduce un fattore $\frac{1}{2}$.

Come in figura, chiamiamo $\mathbf{k}$ e $\mathbf{l}$ gli stati relativi a due particelle iniziali, ed $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ ed $\mathbf{l} - \mathbf{q}$ gli stati successivi all'interazione con un potenziale V . Indichiamo con ϵ_k l'energia della particella nello stato $\mathbf{k}$. Per il primo diagramma, otteniamo così

$$(E_0^{(2)})_{dir} = (-1)^4 \cdot \frac{1}{2} \sum_{q,k,l} \frac{V_q^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}}, \quad (\text{B.1})$$

mentre per il secondo diagramma, abbiamo

$$(E_0^{(2)})_{ind} = (-1)^3 \cdot \frac{1}{2} \sum_{q,k,l} \frac{V_q V_{k+q-l}}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}}. \quad (\text{B.2})$$

Come si vede, le due espressioni ottenute coincidono con i due termini di (2.17), ottenuti tramite la teoria delle perturbazioni di Rayleigh-Schrödinger.

Bibliografia

- [1] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, R. Schiavilla, *An accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking*, Phys. Rev. C 51, 38 (1995), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.51.38>.
- [2] J. Dobaczewski, *Interactions, symmetry breaking, and effective fields from quarks to nuclei. (A primer in nuclear theory)*, J. Chem. Phys., 114, 10591 arXiv:nucl-th/0301069 (2003).
- [3] Steven C. Pieper, K. Varga, R. B. Wiringa, *Quantum Monte Carlo calculations of $A=9,10$ nuclei*, Phys. Rev. C 66, 044310 (2002), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.66.044310>.
- [4] R. D. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, Dover Publications Inc., New York, United States (1992).
- [5] B. R. Barretta, P. Navrátil, J. P. Vary, *Ab initio no core shell model*, Phys. Rep. Volume 69, Pages 131–181 (2013), DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ppnp.2012.10.003>.
- [6] G. Hagen, T. Papenbrock, D. J. Dean, and M. Hjorth-Jensen, *Ab initio coupled-cluster approach to nuclear structure with modern nucleon-nucleon interactions*, Phys. Rev. C 82, 034330 (2010), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.82.034330>.
- [7] M. Bender, P. H. Heenen, P. G. Reinhard *Self-consistent mean-field models for nuclear structure*, Rev. Mod. Phys. 75, 121 (2003), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.75.121>.
- [8] T. H. R. Skyrme, *The effective nuclear potential*, Phys. Rep. Volume 9, Issue 4, Pages 615-634 (1959), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(58\)90345-6](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(58)90345-6).
- [9] R. Sellaheewa, A. Rios, *Isovector properties of the Gogny interaction*, Phys. Rev. C 90, 054327 (2014), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054327>.
- [10] M Waroquier, J Ryckebusch, J Moreau, K Heyde, N Blasi, S.Y van der Werf, G Wenes, *Rearrangement effects in shell-model calculations using density-dependent interactions*, Phys. Rep. Volume 148, Issue 5 (1987), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(87\)90066-4](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(87)90066-4).

- [11] D.M. Brink, E. Boeker, *Effective interactions for Hartree-Fock calculations*, Nucl. Phys. A91 (1967), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9474\(67\)90446-0](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9474(67)90446-0).
- [12] G. Accorto, *Sensitivity of Nuclear Matter Properties to the Range of the Effective Interaction*, Tesi di laurea triennale per la facoltà di Fisica dell'Università degli Studi di Milano, non pubblicato (2015).
- [13] F. E. Harris, H. J. Monkhorst, D. L. Freeman, *Algebraic and Diagrammatic Methods in Many-Fermion Theory*, Oxford Univ Pr (Sd) (1992).
- [14] P. Ring, P. Schuck *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer (1980).
- [15] J.P. Blaizot, *Nuclear compressibilities*, Phys. Rep. Volume 64, Issue 4, pages 171–248 (1980), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90001-0](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(80)90001-0).
- [16] K.T.R. Davies, M. Baranger, *Calculation of the second-order goldstone diagram in nuclear matter*, Phys. Rep. Volume 120, Issue 2, Pages 254-272 (1968), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9474\(68\)90764-1](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9474(68)90764-1).
- [17] H. Euler, *Über die Art der Wechselwirkung in den schweren Atomkernen*, Zeitschrift für Physik Volume 105, Issue 9, pp 553-575 (1937), DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01371561>.
- [18] G. Peano, *Generalizzazione della formula di Simpson*, Estr. dagli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII (1892).
- [19] J. L. Basdevant, J. Rich, M. Spiro, *Fundamentals in Nuclear Physics*, Springer (2005).
- [20] N. Alam, B. K. Agrawal, J. N. De, S. K. Samaddar, G. Colò, *Equation of state of nuclear matter from empirical constraints*, Phys. Rev. C 90, 054317 (2014), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054317>.
- [21] K. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons Inc (1987).
- [22] E. Khan, J. Margueron, *Determination of the density dependence of the nuclear incompressibility*, Phys. Rev. C 88, 034319, (2013), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.88.034319>.
- [23] G. Colò, *The compression modes in atomic nuclei and their relevance for the nuclear equation of state*, Physics of Particles and Nuclei, Volume 39, Issue 2, pp 286-305 (2008).
- [24] E. Khan, J. Margueron, I. Vidana, *Constraining the Nuclear Equation of State at Subsaturation Densities*, Phys. Rev. Lett. 109, 092501 (2012), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.88.034319>.
- [25] J. Piekarewicz, *Validating relativistic models of nuclear structure against theoretical, experimental, and observational constraints*, Phys. Rev. C 76, 064310 (2007), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.76.064310>.

- [26] L. W. Chen, *Nuclear matter symmetry energy and the symmetry energy coefficient in the mass formula*, Phys. Rev. C 83, 044308 (2011), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.83.044308>.